

Bevezetés a matematikába I.

Beadandó feladatok

BEADÁSI HATÁRIDŐ: 2019. november 09.

Feladatok

1. Igazolja a következő azonosságokat! (U az univerzális halmazt jelöli.)

$$(a) A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C) \quad (b) \text{ Ha } A \subseteq B, \text{ akkor } \bar{B} \subseteq \bar{A}. \quad (c) A \Delta U = \bar{A}.$$

2. Felírható-e a H halmaz $A \times B$ alakban? Ha igen, adja meg az A és a B halmazokat!

$$H = \{(a, 1), (b, 1), (a, 2), (b, 2), (c, 2), (c, 1)\}$$

3. Mutassa meg, hogy igaz az alábbi állítás!

$$(A \cap B) \times (C \cap D) = (A \times C) \cap (B \times D)$$

4. Adja meg az $f \circ g$ függvényt, ha létezik!

$$\begin{array}{ll} a. & f(x) = x^2 + 2, \quad x \in [1, 125] \\ & g(x) = 2x + 3, \quad x \in [0, 100] \end{array} \quad \begin{array}{l} b. \\ \\ \end{array} \begin{array}{l} f(x) = \sin(x), \quad x \in [1, 125] \\ g(x) = 5^x, \quad x \in [-1, 10] \end{array}$$

5. Határozza meg az alábbi sorozatok határértékét!

$$(a) \frac{n^{201} + 1}{n^{32} - 2 \cdot n^{67}} \quad (b) 65^n - 2 \cdot 39^n$$

$$(c) \frac{1}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n+6}} \quad (d) \sqrt{n^2 - 1} - \sqrt{n^2 + n}$$

$$(g) \sqrt[n]{5^n + 2 \cdot 3^n} \quad (h) \sqrt[n]{n^5 + 3n + 1}$$

6. Számítsa ki az alábbi határértékeket!

$$(a) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + x^2 - 6x}{x^2 - x - 2} \quad (b) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 + x^2 - 6x}{x^2 - x - 2}$$

$$(c) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 6x + 5}{x^2 - 1} \quad (d) \lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{1}{x-3} - \frac{6}{x^2-9} \right)$$

$$(e) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{2}}{x - 2} \quad (f) \lim_{x \rightarrow \infty} x (\sqrt{x^2 + 1} - x)$$

7. Adja meg az alábbi függvények deriváltfüggvényét!

(a)

$$f(x) = \sin \sqrt{x} + \frac{\cos x}{\ln x},$$

(b)

$$f(x) = \frac{\operatorname{ctg}(x^3)}{\ln(x)} + \cos(x) 2^x,$$

8. Határozza meg az alábbi függvény grafikonjához tartozó, $x_0 = 2$ abszcisszájú pontjára illeszkedő érintő egyenletét!

$$f(x) = \frac{x+1}{x}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

9. Adja meg azokat az intervallumokat, amelyeken az alábbi függvény monoton növekedő illetve monoton csökkenő!

$$f(x) = xe^{-2x}, \quad x \in \mathbb{R},$$

10. Adja meg azokat az intervallumokat, amelyeken az alábbi függvény konvex illetve konkáv!

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}, \quad x \in \mathbb{R},$$

11. Számolja ki az alábbi határozatlan integrált!

(a)

$$\int x^4 \ln(x) dx,$$

(b)

$$\int 2x \sin(x) dx,$$

(c)

$$\int (1+x^2)^{10} x dx,$$

(d)

$$\int \frac{x^2+1}{x^3+3x} dx,$$

(e)

$$\int \frac{1}{x \ln(x)} dx,$$

(f)

$$\int \sqrt{3x-2} dx,$$

(g)

$$\int \frac{1}{\sqrt[3]{3-5x}} dx,$$

(h)

$$\int \sin(x) \cos^3(x) dx,$$