komplex-ea-221105.tex,

Komplex számok

Szalkai István

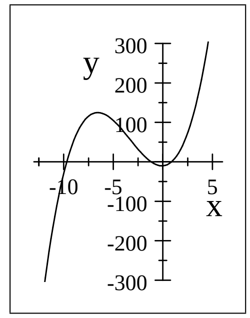
Pannon Egyetem, Matematika Tanszék

SZALKAI.ISTVAN@MIK.UNI-PANNON.HU

"Komplex" = "összetett"

Történet röviden

Speciális **harmadfokú egyenlet:** $y^3 + py + q = 0$



Gyök mindig van, mert $\lim\limits_{-\infty} f(x) = -\infty$ és $\lim\limits_{+\infty} f(x) = +\infty$.

Cardano[1)] - Tartaglia[2)] megoldóképlet:

$$y_{1,2,3} = \sqrt[3]{\frac{-q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{2}\right)^3}} + \sqrt[3]{\frac{-q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{2}\right)^3}}$$

Casus irreducibilis (="*feloldhatatlan/megmagyarázhatatlan eset*"): például az

$$(y-1)(y-2)(y+3) = y^3 - 7y + 6 = 0$$

egyenletnek van három valós gyöke, de a négyzetgyök alatt negatív szám van:

$$\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{2}\right)^3 = \left(\frac{6}{2}\right)^2 + \left(\frac{-7}{2}\right)^3 = \frac{-271}{8} \quad ,$$

de ilyen szám nincs a valóságban, nincs ilyen valós/valódi szám.

---

1) **Gerolamo Cardano** (1501-1576) olasz matematikus, polihisztor

2) **Niccolò Fontana** (Tartaglia = "dadogós", 1499 - 1557), olasz matematikus, mérnök.

Alapok

Descartes[3] jelölése: **Ötlet:** képzeljük el ("*imagine, imaginare, imázs*")

$\boxed{i := \text{"}\sqrt{-1}\text{"}}$ = elképzelt / **képzetes egység**, vagy másképpen: $\boxed{\text{"}\, i^2 = -1 \,\text{"}}$.

Ekkor: $\sqrt{-u} = \sqrt{u}\cdot i$ ha $0 < u$, és vannak $b\cdot i$ és $a+bi$ számok is $(a, b \in \mathbb{R})$, például $5 - 3i$, stb.

Tehát: $\boxed{\mathbb{C} := \{a + bi : a, b \in \mathbb{R}\}}$ a **komplex** ("*összetett, bonyolult*") **számok halmaza**.

Tétel: ez elegendő. $\square$

Ha $z = a+bi \in \mathbb{C}$, akkor $\mathbf{Re}(z) := a$ = **valós** (valódi) **rész**e z -nek, $\mathbf{Im}(z) := b$ = **képzetes** (elképzelt) **rész**e z -nek, és a $z = a + bi$ felírás a z komplex szám **algebrai** vagy **kanonikus** alakja[4] ("*kánon*"="*rend*").

Megjegyzések: i) $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ hiszen bármely $x \in \mathbb{R}$ vaslós számra $x = x+0\cdot i \in \mathbb{C}$.

ii) fizikában i helyett j -t írnak.

---

[3] **René Descartes** (latinul: Renatus Cartesius, 1596 - 1650) francia filozófus, tudós, matematikus.

[4] lásd később a trigonometrikus és az exponenciális alakokat.

Alapműveletek

$$(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)\,i$$

$$(a+bi)-(c+di)=(a-c)+(b-d)\,i$$

$$(a+bi)\cdot(c+di)=ac+adi+bci+bdi^2=ac+adi+bci-bd=(ac-bd)+(ad+bc)\,i$$

Például:

$$(5-3i)+(-4+0.5i)=(5-4)+(-3+0.5)\,i=1-2.5i\ ,$$

$$(5-3i)-(-4+0.5i)=(5-(-4))+(-3-0.5)\,i=9-3.5i\ ,$$

$$(5-3i)\cdot(-4+0.5i)=$$

$$=5\cdot(-4)+5\cdot 0.5i-3i\cdot(-4)-3\cdot 0.5i^2=$$

$$=5\cdot(-4)+5\cdot 0.5i-3i\cdot(-4)-3\cdot 0.5\cdot(-1)=(-20+1.5)+(5\cdot 0.5+3\cdot 4)\cdot i=$$

$$=-18.5+14.5i$$

Osztás: $\dfrac{a+bi}{c+di}$ probléma a nevezőben: i .

Megoldás: Eltüntetjük i -t a nevezőből, vagyis "i -telenítjük" a nevezőből. Mivel $i :=$ " $\sqrt{-1}$ ", ezért a módszer ugyanaz, mint a középiskolában tanult "nevező gyöktelenítése" módszer: *bővítjük a törtet a nevező* **konjugáltjával** (ld. alább), és a nevezőben felhasználjuk az " $(x-y)\,(x+y)=x^2-y^2$ " azonosságot, és az $i^2=-1$ összefüggést:

$$\frac{a+bi}{c+di}=\frac{(a+bi)\cdot(c-di)}{(c+di)\cdot(c-di)}=\frac{ac-iad+ibc-bdi^2}{c^2-(di)^2}=\frac{ac+bd+i\,(bc-ad)}{c^2+d^2}=$$

$$=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+i\cdot\frac{bc-ad}{c^2+d^2}\ ,$$

ami a végeredmény, hiszen $\frac{ac+bd}{c^2+d^2}$ és $\frac{bc-ad}{c^2+d^2}$ valós számok, és $c^2+d^2\neq 0$ ha $c+di\neq 0$.

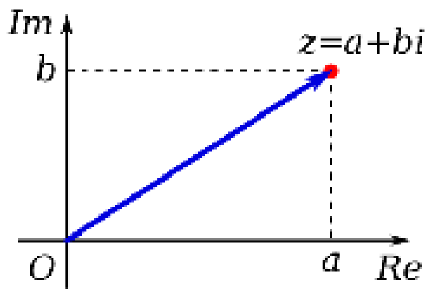
Például: $$\frac{5-3i}{-4+0.5i}=\frac{(5-3i)\cdot(-4-0.5i)}{(-4+0.5i)\cdot(-4-0.5i)}=\frac{-20-2.5i+12i+1.5i^2}{(-4)^2+(0.5)^2}=$$

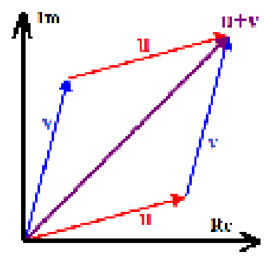
$$= \frac{(-20-1.5)+i\,(12-2.5)}{16.25} = \frac{-21.5+9.5i}{16.25} = \frac{-21.5}{16.25} + \frac{9.5}{16.25} i \approx$$
$$\approx -1.323\;077 + 0.584\,615 i \;.$$

Ábrázolásai

Derékszögű = Descartes koordinátarendszer ("Gauss[5]-féle számsík"):

$z = D\,(a, b)$





Re (=*reális*) és **Im** (=*imaginárius* =*elképzelt*) tengelyek skálái (beosztásai): $0, 1, 2, 3, \ldots$ (szokásos / valódi számok) és $0, 1i, 2i, 3i, \ldots$

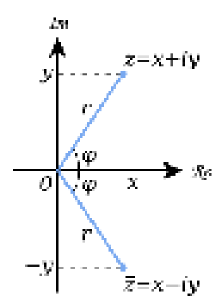
FONTOS:

$$z_1 = z_2 \iff a_1 = a_2 \;\textit{és}\; b_1 = b_2 \;, \tag{1}$$

speciálisan

$$z = 0 \iff a = 0 \;\textit{és}\; b = 0 \;. \tag{2}$$

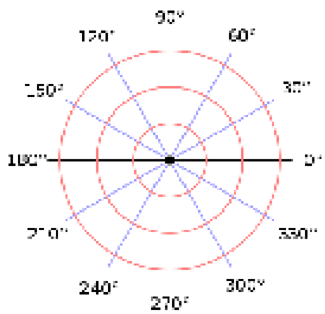
konjugált (="átellenes", geometriában is)

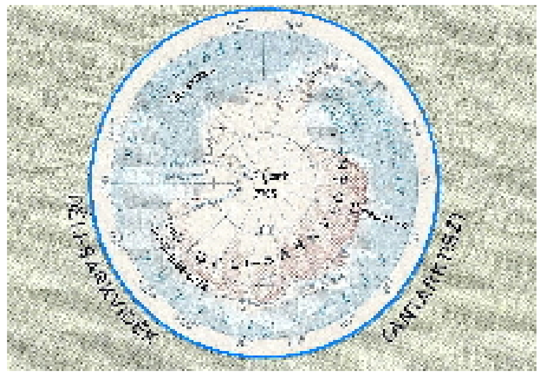


[5] **Carl Friedrich Gauss** (1777 - 1855) német matematikus, természettudós, csillagász.

Megjegyzés: pl. $z = 5 - 3i$ konjugáltja $\overline{z} = 5 + 3i$, és $\overline{\overline{z}} = z$ ("tükörkép tükörképe az eredeti")

Polár[6] koordinátarendszer: $z = P\,(r, \varphi)$, $r =$ "*rádiusz*"





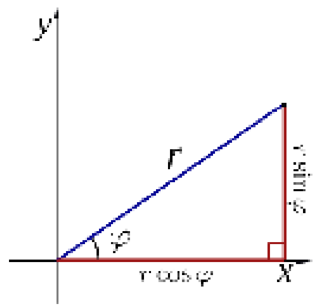
FONTOS:

$$z_1 = z_2 \iff r_1 = r_2 \neq 0 \ \ \textit{és} \ \ \varphi_1 = \varphi_2 + 2k\pi \ \ (k \in \mathbb{Z}) \qquad (3)$$
$$\textit{vagy} \ \ r_1 = r_2 = 0 \ \ \textit{és} \ \ \varphi_1, \varphi_2 \ \textit{tetszőleges,}$$

speciálisan
$$z = 0 \iff r = 0 \ \textit{és} \ \varphi \ \textit{tetszőleges.} \qquad (4)$$

[6] **Toldi Miklós**

Átváltások és az exponenciális alak



Descartes $\Longrightarrow$ Polár:

$$r = \sqrt{a^2 + b^2}\ , \quad tg\,(\varphi) = \frac{b}{a} \text{ ha } a \neq 0$$

$$\Longrightarrow \quad \varphi = arctg\left(\frac{b}{a}\right) \quad \text{ha } -90^o < \varphi < +90^o$$

$$\Longrightarrow \quad \varphi = arctg\left(\frac{b}{a}\right) + 180^o \quad \text{ha } +90^o < \varphi < 270^o$$

$$\Longrightarrow \quad \varphi = \pm 90^o \text{ ha } \ldots$$

Polár $\Longrightarrow$ Descartes:

$$a = r \cdot \cos(\varphi)\ , \qquad b = r \cdot \sin(\varphi) \quad \text{(nincs kivétel)}$$

$\Longrightarrow$

$$\boxed{z = a + b \cdot i = r \cdot (\cos(\varphi) + i \cdot \sin(\varphi))} \tag{5}$$

= szokásos **"trigonometrikus alak"** (kicsit redundáns)

Megjegyzés: cos ( ) és sin ( ) után mindig ugyanaz áll.

Euler[7] **Tétel:** $e^{i\cdot\varphi} = \cos(\varphi) + i\cdot\sin(\varphi)$ **!!! RADIÁN !!!**

$\Longrightarrow \quad z = r\cdot e^{i\cdot\varphi}$, modernebb jelölés: $= r\cdot\exp(i\cdot\varphi)$

= **exponenciális - alak**

További műveletek

FIGYELEM: $+/-$ (összeadás-kivonás) CSAK algebrai alakban lehetséges.

Szorzás, osztás:

$$r_1 e^{i\cdot\varphi_1}\cdot r_2 e^{i\cdot\varphi_2} = r_1 r_2\cdot e^{i\cdot(\varphi_1+\varphi_2)} = r_1 r_2\cdot\exp\left(i\cdot(\varphi_1+\varphi_2)\right) \tag{6}$$

és

$$\frac{r_1 e^{i\cdot\varphi_1}}{r_2 e^{i\cdot\varphi_2}} = \frac{r_1}{r_2}\cdot e^{i\cdot(\varphi_1-\varphi_2)} = \frac{r_1}{r_2}\cdot\exp\left(i\cdot(\varphi_1-\varphi_2)\right) \tag{7}$$

Ebből "következnek" az ún. Moivre[8]-Laplace[9] formulák:

Ha $z_1 = r_1(\cos(\varphi_1) + i\cdot\sin(\varphi_1))$ és $z_2 = r_2(\cos(\varphi_2) + i\cdot\sin(\varphi_2))$, akkor

$$z_1 z_2 = r_1 r_2\cdot(\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2)) \tag{8}$$

és

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\cdot(\cos(\varphi_1-\varphi_2) + i\sin(\varphi_1-\varphi_2)) \ , \tag{9}$$

továbbá

$$|z_1 z_2| = |z_1|\cdot|z_2| \ , \quad |z^\alpha| = |z|^\alpha \quad \text{és} \quad \left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|} \tag{10}$$

ahol $|z| := \|z\| := r$ a z szám **abszolút értéke** vagy **normája**.

[7] **Leonhard Euler** (1707- 1783) svájci matematikus és fizikus, a matematikatörténet egyik legjelentősebb alakja.

[8] **Abraham de Moivre** (1667 - 1754) francia matematikus.

[9] **Pierre-Simon de Laplace** (1749 - 1827) francia matematikus, csillagász és fizikus.

FIGYELEM: HOL A HIBA:

$1 = \sqrt{1} = \sqrt{(-1)\cdot(-1)} = \sqrt{(-1)} \cdot \sqrt{(-1)} = i \cdot i = -1$???

Hatványozás

FIGYELEM: algebrai alakban csak egész kitevők számolhatók, nehezen, gyökvonásról ne is beszéljünk. Trigonometrikus alakban azonban sokkal egyszerűbben számolhatunk.

Tetszőleges valós kitevő: $\alpha \in \mathbb{R}$, $z = r(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi))$ esetén:

$$z^\alpha = r^\alpha \cdot (\cos(\alpha \cdot \varphi) + i \sin(\alpha \cdot \varphi)) \ . \tag{11}$$

Gyökvonás

Csak *egész* gyököt vonunk!

LEVEZETÉS: Adott $z = r(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi))$ és $n \in \mathbb{N}$, keresendő(k) azon $w = \rho(\cos(\psi) + i\sin(\psi)) \in \mathbb{C}$ számok, amelyekre $w = \sqrt[n]{z}$, azaz $w^n = z$.
Részletesen:

$$\rho^n(\cos(n\psi) + i\sin(n\psi)) = r(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi)) \,. \tag{12}$$

(3) alapján ($z \neq 0$, $0 < r$):

$$\rho^n = r \ \textit{és} \ n\psi = \varphi + 2k\pi \ \ (k \in \mathbb{Z}) \tag{13}$$

vagyis

$$\rho = \sqrt[n]{r} \quad \textit{és} \quad \psi_k = \frac{\varphi}{n} + k\frac{2\pi}{n} \quad (k = 0, 1, ..., n-1) \ , \tag{14}$$

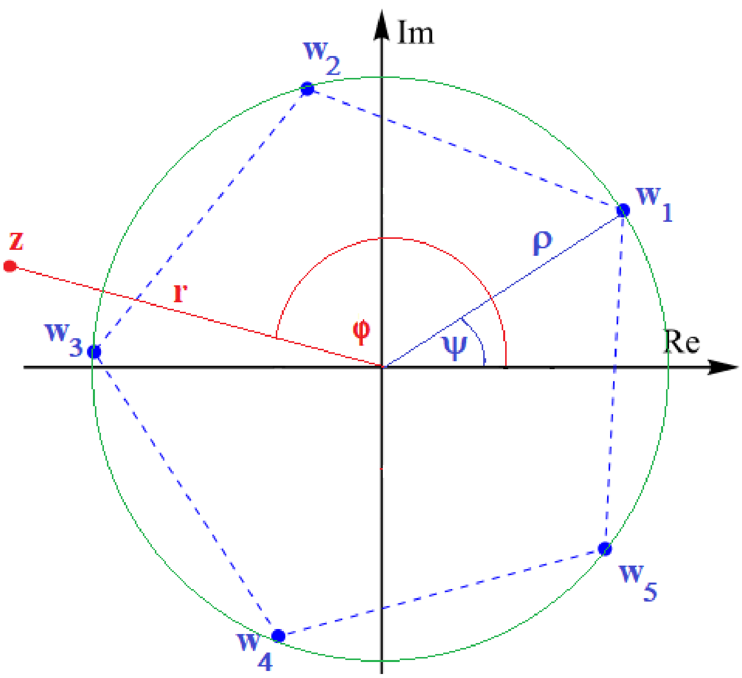
vagyis

$$\boxed{w_k = \sqrt[n]{r} \cdot \left(\cos\left(\frac{\varphi}{n} + k\frac{2\pi}{n}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{\varphi}{n} + k\frac{2\pi}{n}\right)\right) \quad (k = 0, 1, ..., n-1) \ ,} \tag{15}$$

ugyanis $k = n$ esetén $\psi_n = \dfrac{\varphi}{n} + n \cdot \dfrac{2\pi}{n} = \dfrac{\varphi}{n} + 2\pi = \psi_0$.

Tehát minden $n \in \mathbb{N}$ esetén *pontosan* n db n -dik gyök van !

Geometriai szemléltetés: mivel ρ mindegyik gyöknél ugyanaz, ezért a gyökök egy oriogó körüli, ρ sugarú körön vannak, és mivel a szögek között $\dfrac{2\pi}{n}$ a növekedés, ezért a gyökök egy *szabályos* n *-szög* csúcsai !



Egységgyökök

Definíció: Tetszőleges $n \in \mathbb{N}$ természetes számra $\varepsilon_i := \sqrt[n]{1}$, $i = 1, ..., n$.

Az előző fejezet (15) képletéből tudjuk:

$$\boxed{\varepsilon_k = \cdot \left(\cos\left(k\frac{2\pi}{n}\right) + i \cdot \sin\left(k\frac{2\pi}{n}\right)\right) \quad (k = 0, 1, ..., n-1) \ ,} \tag{16}$$

mert $\sqrt[n]{r} = 1$ és $\varphi = 0$, hiszen $1 = 1 + 0 \cdot i$.

Érdekességek

- ◊ $ln(-2)$, $\sin(z) = 2$, ... mind megoldhatók $\mathbb{C}$ -ben,
- ◊ Bolyai János[10)] is sokat foglalkozott $\mathbb{C}$ geometriájával,
- ◊ hiperkomplex számok, ...
- ◊ a fehér háromszög mindig szabályos :

Alkalmazásai

A matematika, fizika, kémia, képfeldolgozás, ... *minden* területén !!!

10) **Bolyai János** (1802 - 1860) magyar matematikus és hadmérnök, Bolyai Farkas fia.