ZFC története

Készítette:

Farkas Bence Gábor

Kaufmann Tamás

Nyikos Zoltán

Tartalomjegyzék

- Történeti áttekintés
  - Korábbi axiómarendszerek
  - Cantor, Boole, Peano
- Hilbert programja
- Zermelo-Fraenkel halmazelmélet és a kiválasztási axióma
  - Axiómák

Mi az axiómarendszer?

- Axióma: alapigazság
  - Olyan kiindulási feltételt jelent (például a filozófia ágaiban, vagy a matematikában), amit adottnak veszünk az érvelések során
  - Egyszerű
  - Ellentmondásmentes
  - Másra vissza nem vezethető
- Axiómarendszer: axiómák csoportja, mely egy elmélet logikai felépítésénél használatos
  - Teljes
  - Ellentmondásmentesség
  - Egyes axiómák függetlensége

Boole algebra

- George Boole és Augustus de Morgan
- Arisztotelészi szillogisztikus logikát igyekezett az algebra formalizálásának mintájára matematikai formulákkal megfogalmazni
- Az axiómarendszert Edward Vermilye Huntington alkotta meg belőle
- Az elsőrendű és másodrendű logika alapját képezi

Boole axiómarendszer

Boole-algebrák axiómái

$$\mathfrak{B} = (X, \cup, \cap, \overline{}, \emptyset, I)$$

kommutativitás	$A \cup B = B \cup A$	(BA1)
	$A \cap B = B \cap A$	(BA2)
asszociativitás	$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$	(BA3)
	$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$	(BA4)
disztributivitás	$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$	(BA5)
	$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$	(BA6)
elnyelési tulajdonságok	$A \cup (A \cap B) = A$	(BA7)
	$A \cap (A \cup B) = A$	(BA8)
$\emptyset$ és I tulajdonságai	$A \cup \overline{A} = I$	(BA9)
	$A \cap \overline{A} = \emptyset$	(BA10)
	$A \cup \emptyset = A$	(BA11)
	$A \cap \emptyset = \emptyset$	(BA12)
	$A \cup I = I$	(BA13)
	$A \cap I = A$	(BA14)

Peano axiómarendszer

- Giuseppe Peano jegyezte le 1889-ben
- A természetes számok egy elsőrendű axiómarendszere
- Szokásos jelölése: PA
- Négy jelet használt
  - 0 – nulla, S – rákövetkezés, + - összeadás, * - szorzás

1. $\neg\exists x\, sx=0$ – A nulla semminek sem rákövetkezője.
2. $\forall x\forall y(sx=sy\to x=y)$ – Amiknek a rákövetkezői is azonosak, azok maguk is azonosak.
3. $\forall x(x+0)=x$ – A nullával jobbról való összegzés hatástalan.
4. $\forall x\forall y(x+sy)=s(x+y)$ – a rákövetkezővel való összegzés visszavezethető az összeg rákövetkezőjére.
5. $\forall x(x\cdot 0)=0$ – A nullával jobbról való szorzás nullát ad.
6. $\forall x\forall y(x\cdot sy)=(x\cdot y)+x$ – A rákövetkezővel való szorzás visszavezethető a másik tagnak az szorzathoz való még egyszeri hozzáadására.
7. $(\varphi_x[0]\wedge\forall x(\varphi\to\varphi_x[sx]))\to\forall x\varphi$ – A teljes indukció axiómasémája: Ha a φ formula igaz a nullára, továbbá a formula igazsága a rákövetkezés során öröklődik, akkor ez a formula minden számra igaz.

Levezethető tulajdonságok (részlet)

Műveleti tulajdonságok tételei		
$+$	asszociativitás	$PA\vdash\forall x\forall y\forall z((x+y)+z)=(x+(y+z))$
	kommutativitás	$PA\vdash\forall x\forall y(x+y)=(y+x)$
$\cdot$	egységelem	$PA\vdash\forall x(x\cdot 1)=x$
	asszociativitás	$PA\vdash\forall x\forall y\forall z((x\cdot y)\cdot z)=(x\cdot(y\cdot z))$
	kommutativitás	$PA\vdash\forall x\forall y(x\cdot y)=(y\cdot x)$
$+,\cdot$	disztributivitás	$PA\vdash\forall x\forall y\forall z(x\cdot(y+z))=((x\cdot y)+(x\cdot z))$

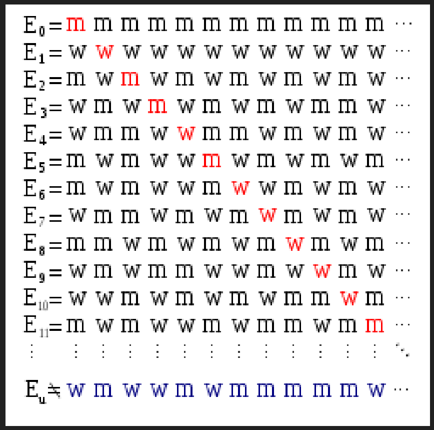
A gyenge rendezés tételei	
0 minimális elem	$PA\vdash\forall x 0\leq x$
$\leq$ reflexív	$PA\vdash\forall x x\leq x$
$\leq$ antiszimmetrikus	$PA\vdash\forall x\forall y(x\leq y\wedge y\leq x)\rightarrow x=y$
$\leq$ tranzitív	$PA\vdash\forall x\forall y\forall z((x\leq y\wedge y\leq z)\rightarrow x\leq z)$
$\leq$ lineáris	$PA\vdash\forall x\forall y((x\leq y\vee x=y)\vee y\leq x)$
$\leq$ és a $+$	$PA\vdash\forall x\forall y\forall z(x\leq y\rightarrow(x+z)\leq(y+z))$
$\leq$ és a $\cdot$	$PA\vdash\forall x\forall y\forall z(x\leq y\rightarrow(x\cdot z)\leq(y\cdot z))$

Szigorú rendezés tételei	
0 infimum	$PA\vdash\neg\exists x x<0$
$<$ irreflexív	$PA\vdash\forall x\neg x<x$
$<$ antiszimmetrikus	$PA\vdash\forall x\forall y(x<y\wedge y<x)\rightarrow x=y$
$<$ tranzitív	$PA\vdash\forall x\forall y\forall z((x<y\wedge y<z)\rightarrow x<z)$
$<$ lineáris	$PA\vdash\forall x\forall y((x<y\vee x=y)\vee x>y)$
$<$ és a $+$	$PA\vdash\forall x\forall y\forall z(x<y\rightarrow(x+z)<(y+z))$
$<$ és a $\cdot$	$PA\vdash\forall x\forall y\forall z((x<y\wedge 0<z)\rightarrow(x\cdot z)<(y\cdot z))$

oszthatósági reláció tételei	
reflexivitás	$PA\vdash d\mid d$
antiszimmetria	$PA\vdash\forall x\forall y((x\mid y\wedge y\mid x)\rightarrow x=y)$
tranzitivitás	$PA\vdash\forall x\forall y\forall z((x\mid y\wedge y\mid z)\rightarrow x\mid y)$
1 egység	$PA\vdash\forall x 1\mid x$
$\mid$, $+$	$PA\vdash(d\mid x\rightarrow(d\mid(x+y)\leftrightarrow d\mid y))$

Cantor féle halmazelmélet

- Másik nevén naív halmazelmélet
- Alapjait Georg Cantor rakta le egy 1874-ben megjelent cikkében
- Minden tulajdonsághoz tartozik egy halmaz, amibe azok a dolgok tartoznak, amik azzal a tulajdonsággal rendelkeznek
- Megteremtette a végtelen számosságok elméletét (Cantor féle diagonális módszer)
- A diagonalizáció segítségével bizonyította a hatványhalmazok létezését



Példa és jelölések

- T: tulajdonság, x: változó
- T(x): nyitott mondat, még nem értelmezhető, behelyettesítve igaz vagy hamis

- T: Kutya
- T(Buksi) -> igaz
- T(Cirmi) -> hamis

$$\{x \mid T(x)\} = \{x \mid x \textbf{ kutya}\}$$

Felmerült problémák

- 23 Hilbert probléma
  - A Peano-axiómarendszer ellentmondásmentességének bebizonyítása
  - Prímszám problémák (Riemann-sejtés, Goldbach-sejtés, ikerprímszám-sejtés)
- Cantor Kontinuum hipotézise
  - nincs olyan halmaz, amelynek számossága a valós számok számossága (kontinuum-számosság) és a természetes számok számossága (megszámlálhatóan végtelen) közé esne
- Módszer a diofantoszi egyenletek megoldhatóságának eldöntésére

Hilbert programja

- Matematika megingása a 20. században
  - Russell paradoxon, Hilbert problémák
  - Inkonzisztenciák (Cantor)
  - Nem elég erős axiómarendszerek (Peano)
- Célja a metamatematika megalkotása
  - Hilbert úgy vélte, hogy a bizonyításoknak csak logikai axiómákból és szabályokból szabad felépülnie
  - Ezeknek a bizonyításoknak félreértelmezhetetlenek kell lenniük

Gödel tételei

- Nemteljesség: Minden olyan konzisztens elméletben, amely legalább olyan erős, mint az aritmetika, vannak olyan feltevések, amelyeket sem bizonyítani, sem cáfolni nem tudunk
- Konzisztencia bizonyíthatatlansága: egy elmélet konzisztenciáját nem lehet önmagával bizonyítani
- Ezek a tételek A Hilbert programot teljesen felborították
- A tételek kimondása után Hilbert programját újra kellett gondolni
  - Ha a matematika egészét nem is lehet lefedni, a matematika használt részét lehet formalizálni
  - Ha már nem lehet minden axiómarendszert bizonyítani, pár fontosabb rendszert azért lehet (például Boole)

Axiómarendszer szükséges tulajdonságai

- Konzisztencia
  - Nem lehet ellentmondást létrehozni az axiómákból a matematikai szabályokat felhasználva
- Teljesség
  - Minden helyes matematikai formula eldönthető
- Eldönthetőség
  - Algoritmussal eldönthető egy formuláról annak igazsága
- Matematika formalizációja
  - Minden matematikai állítás egyértelműen leírható formulával
- Megőrzés
  - Egy bizonyítás ami „gyakorlati” dologra ad következtetést egy „elméleti” dolog felhasználásával (például megszámlálhatatlan halmaz) bebizonyítható csak „gyakorlati” dolog használatával

Zermelo-Fraenkel halmazelmélet és a kiválasztási axióma

- Axoimatikus rendszer
  - Csak az axiómák segítségével hoz következtetéseket
- Napjaink standard axiómarendszere
- 1908-ban Ernst Zermelo alkotta meg az első ellentmondásmentes halmazelméleti axiómarendszert.
- Abraham Fraenkel és Thoralf Skolem 1922-ben kibővítette
- Végül 1930-ban Zermelo-Fraenkel halmazelmélet néven vált ismertté
- Később hozzávették a kiválasztási axiómát (Axiom of choice), de ez nem képezi az axiómarendszer szerves részét

A ZFC fogadtatása

- Egyesek gyengének, mások túl erős axiómarendszernek tartják
  - Egyszerű axiómarendszereket gyengébb rendszerrel is be lehet bizonyítani
  - Bonyolultabb rendszerekhez elég csak egy része (Pl: ZC)
  - Univerzális halmazt nem tartalmazza a ZFC
  - Vannak eldönthetetlen problémák (kontinuum hipotézis)

ZFC axiómái

- Az üres halmaz axiómája
- Meghatározottsági axióma
- Páraxióma
- Unió axióma
- Hatványhalmaz axióma
- Részhalmaz axióma
- Végtelenségi axióma
- Kiválasztási axióma
- A helyettesítés axiómája
- A regularitás axiómája

- Axiom of empty set
- Axiom of extensionality
- Axiom of pairing
- Axiom of union
- Axiom of power set
- Axiom schema of specification
- Axiom of infinity
- Axiom of choice
- Axiom schema of replacement
- Axiom of regularity

∈-reláció

- A halmazelmélet azon a feltételezésen alapszik, hogy létezik egy alapvető reláció (∈)
- Az axiómák nem definálják ezt a relációt, mint ahogy a halmazt sem
- Az axiómák csak megmutatják, hogyan lehet ezeket használni (ezáltal adnak egyfajta „definíciót”)
- $\notin(x, y) = x \notin y \iff \neg(x \in y)$
- $x \subseteq y \iff \forall a: (a \in x \Rightarrow a \in y)$
- $x = y \iff x \subseteq y \land y \subseteq x$

Az üres halmaz axiómája (Axiom of empty set)

$$\exists x \forall u (u \notin x).$$

- Létezik egy olyan halmaz, ami nem tartalmaz egy elemet sem
- Tétel: csak egy ilyen halmaz létezik
- Bizonyítás (informális):
  1. Tegyük fel, hogy X és X' üres halmazok
  2. $\forall y : (y \in X) \Rightarrow (y \in X')$
  3. Ebből következik, hogy $X \subseteq X'$
  4. Fordítva: $\forall y : (y \in X') \Rightarrow (y \in X)$
  5. Ebből következik: hogy $X' \subseteq X$
  6. Összegezve: $X = X'$

Meghatározottsági axióma (Axiom of extensionality)

$$\forall A \forall B (\forall X (X \in A \iff X \in B) \Rightarrow A = B)$$

- Adott egy A és egy B halmaz
- Ha minden X halmazra igaz az, hogy X eleme A-nak akkor és csak akkor ha X eleme B-nek is, akkor A és B egyenlő
- Ha van olyan X halmaz, ami A-ba beletartozik, de B-be nem (vagy fordítva), akkor az A és B halmaz nem egyenlő
- (ZFC-be csak halmazokat használunk)

Páraxióma (Axiom of pairing)

$$\forall A \forall B \exists C \forall D [D \in C \iff (D = A \lor D = B)]$$

- Legyenek A és B halmazok. Ekkor létezik egy C halmaz melynek elemei pontosan ezen A és B halmazok.
- Az axióma segítségével megmutatható, hogy csak egy ilyen C halmaz létezik.

Unió axióma (Axiom of union)

$$\forall A\, \exists B\, \forall c\, (c \in B \iff \exists D\, (c \in D \land D \in A))$$

- Bármely A halmazra igaz, hogy létezik egy $\bigcup A$ halmaz amely csak az A halmaz elemének elemeit tartalmazza.
- Általános jelölés:
  - Egy halmazra: $\{\{a\}, \{b\}\} = A \Rightarrow \cup A = \{a, b\}$
  - Két halmazra $A \cup B = \cup\{A, B\}$
- Korlátozás: Végtelen sok halmazt tudunk egy halmazba összegyűjteni, de nem többet, mint amennyi elfér egy halmazban.

Hatványhalmaz axióma (Axiom of power set)

$$\forall x\,\exists y\,\forall z\,[z \in y \iff \forall w\,(w \in z \Rightarrow w \in x)]$$

- Minden x halmazhoz létezik egy P(x) halmaz úgy, hogy az tartalmazza x összes részhalmazát.
- Példa: $m = \{a, b\} \Rightarrow P(m) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$
- Következmény: A hatványhalmaz axiómával egyszerűen definiálhatóvá vált két halmaz Descartes szorzata:

$$X \times Y = \{(x, y) : x \in X \wedge y \in Y\}$$

Végtelenségi axióma (Axiom of infinity)

$$\exists \mathbf{I}\,(\emptyset \in \mathbf{I} \wedge \forall x \in \mathbf{I}\,(\,(x \cup \{x\}) \in \mathbf{I})).$$

- Létezik egy I halmaz, ami tartalmazza az üres halmazt, és minden x elemére igaz, hogy ez az I halmaz tartalmazza a {x}-t is elemeként.
- Példa: $\left\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \left\{\{\{\emptyset\}\}\right\}, \dots\right\} \to 0, 1, 2, 3, \dots (\mathbb{N})$
- Megjegyzés: hasonló módon tudjuk definiálni a valós számok halmazát is $\mathbb{R} : \mathcal{P}(\mathbb{N})$

A regularitás axiómája (Axiom of regularity)

$$\forall x[\exists a(a \in x) \Rightarrow \exists y(y \in x \land \neg\exists z(z \in y \land z \in x))].$$

- Minden nem üres X halmazra igaz, hogy tartalmaz egy Y halmazt úgy, hogy a két halmaznak nincs közös eleme
- Következmények
  - Nem létezik olyan halmaz, amely tartalmazza önmagát
  - Végtelenségig egymásba ágyazott halmazok nincsenek
  - Minden halmazt az üres halmazból kell felépíteni

Részhalmaz axióma (Axiom schema of specification)

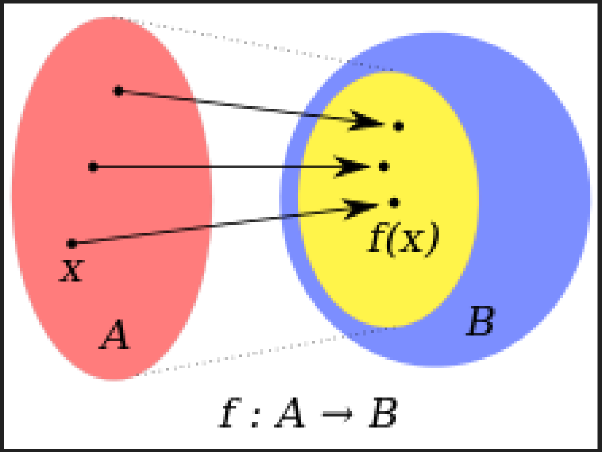
$$\forall w_1, \ldots, w_n \, \forall A \, \exists B \, \forall x \, (x \in B \Leftrightarrow [x \in A \land \varphi(x, w_1, \ldots, w_n, A)])$$

- Axióma séma: Egy formula által generált végtelen axióma halmaza
- Minden A halmazhoz létezik B halmaz úgy, egy x halmaz akkor és csak akkor van benne B halmazban, ha az benne van A-ban is és φ igaz x-re
  - B részhalmaza A-nak
- A φ csak A halmaz elemeiből választ $\{x \in A \mid P(x)\}$ (P: predikátum)
  - Ha φ minden elem közül választana, a Russel-paradoxonhoz jutnánk
  - $\{x \mid P(x)\}$
  - Például: vegyük az összes olyan X halmazt, amire igaz, hogy X nem tartalmazza önmagát

A helyettesítés axiómája (Axiom schema of replacement)

$$\forall w_1,\ldots,w_n\,\forall A\,([\forall x\in A\,\exists!y\,\phi(x,y,w_1,\ldots,w_n,A)]$$
$$\Rightarrow\exists B\,\forall y\,[y\in B\Leftrightarrow\exists x\in A\,\phi(x,y,w_1,\ldots,w_n,A)])$$

- Minden A halmazhoz létezik egy B halmaz úgy, hogy minden B-beli y elemre igaz az, hogy létezik A-ban egy x elem, amelynek képe y
- $\exists!\,y$: pontosan egy olyan y létezik
- „függvények definiálása"
- $\forall A\,\exists B\,\forall y\,(y\in B \iff \exists x\in A : y = F(x))$
- Ha van egy F leképezés A halmazból, akkor annak képe is egy halmaz lesz



Kiválasztási axióma (Axiom of choice)

$$\forall X \left[\emptyset \notin X \implies \exists f\colon X \to \bigcup X \quad \forall A \in X \, (f(A) \in A) \right].$$

- Bármilyen X nemüres halmazokhoz létezik egy F függvény, ami kiválaszt minden halmazból egy elemet
- Legyen X egy olyan halmaz, amelynek elemei, nem üres és kölcsönösen diszjunkt halmazok. Ekkor létezik egy olyan Y halmaz, amely pontosan egy elemet tartalmaz, X halmaz minden eleméből.
- Példa: (nincs szükség az axiómára)

$$X : \{ \{bal\ cipő\ 1, jobb\ cipő\ 1\}, \{bal\ cipő\ 2, jobb\ cipő\ 2\}, \dots \}$$
$$Y : \{ bal\ cipő\ 1, bal\ cipő\ 2, \dots \}$$

- Ellen példa: (szükség van az axiómára, mert nem tudjuk megkülönböztetni az elemeket)

$$X : \{ \{(bal)\ zokni\ 1, (jobb)\ zokni\ 1\}, \{(bal)\ zokni\ 2, (jobb)\ zokni\ 2\}, \dots \}$$
$$Y : \{ zokni\ 1, zokni\ 2, \dots \}$$

- Megjegyzés: Az axióma segítségével bizonyítható, hogy minden vektortérnek van bázisa.

Kiválasztási axióma problémái

- Az axióma nem konstruktív, pontosabban feltételezi egy bizonyos tulajdonsággal rendelekező C halmaz létezését, de semmi iránymutatást nem ad arra vonatkozóan, hogy hogyan konstruáljuk meg azt. Ami hiányzik, az a kiválasztó függvény
  - Rengeteg kritikát kapott emiatt
- A kiválasztási axióma felhasználásával Stefan Banach és Alfred Tarski bizonyította, hogy egy egy 3 dimenziós, tömör gömböt fel lehet vágni véges sok olyan (nem mérhető) darabra, amelyekből két, az eredeti gömbbel megegyező méretű tömör gömböt lehet összeállítani.
  - (Banach-Tarski-paradoxon)

Összefoglalás

- Történeti áttekintés
  - Korábbi axiómarendszerek
  - Cantor, Boole, Peano
- Hilbert programja
- Zermelo-Fraenkel halmazelmélet és a kiválasztási axióma

Köszönjük a figyelmet!

Források

- https://en.wikipedia.org/wiki/Zermelo%E2%80%93Fraenkel_set_theory
- https://www.youtube.com/watch?v=xalFtiY-JoQ
- https://www.youtube.com/watch?v=AAJB9I-HAZs
- https://www.quora.com/What-is-ZFC-Zermelo-Fraenkel-set-theory-and-why-is-it-important
- A Survey of Mathematical Logic, Part I: Pre-1931; *The Mathematical Gazette,* Vol. 80, No. 487
  - http://www.jstor.org/stable/3620335