1. Ismertesse az eseményalgebra fogalmát, az eseményekkel végezhető műveleteket, és azok tulajdonságait. (5p)

2. A feltételes valószínűség és függetlenség definíciója, a függetlenség tulajdonságai. (5p)

3. Mit állít a nagy számok törvénye? (3p)

4. Egy 32 lapos kártyacsomagból kiveszünk 4 lapot visszatevés nélkül. Mennyi annak valószínűsége, hogy a négy lap nem azonos színű lesz? (2p)

$$p = 1 - \frac{4 \cdot \binom{8}{4}}{\binom{32}{4}} = 1 - \frac{7}{899} = \frac{892}{899}$$

5. Két számot találomra választunk a $[0;4]$ intervallumban. Mennyi annak valószínűsége, hogy a két szám különbsége 1-nél kisebb? (3p)

$$T = 16 \qquad t = 16 - 9 \qquad p = \frac{7}{16}$$

6. Egy bizonyos típusú alaktrészt három gyártó készít. A termékek megoszlása egy raktárban gyártónként 30%, 20% és 50%, a hibás termékek aránya pedig az egyes gyártók esetén 10%, 20% és 5%. Találomra választva egy terméket, mennyi annak valószínűsége, hogy hibásat választunk? Ha a választott termék hibásnak bizonyul, melyik gyártótól milyen valószínűséggel származik a termék? (4p)

$$\begin{aligned} P(H) &= 0.1 \cdot 0.3 + 0.2 \cdot 0.2 + 0.05 \cdot 0.5 = 0.095 \\ P(I|H) &= \frac{0.1 \cdot 0.3}{0.095} = 0.315\,79 \qquad P(II|H) = \frac{0.2 \cdot 0.2}{0.095} = 0.421\,05 \qquad P(III|H) = 1 - 0.315\,79 - 0.421\,05 = 0.263\,16 \end{aligned}$$

7. Legyen a ξ v.v. sűrűségfüggvénye

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2 & \text{ha } 0 \le x \le a \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases} .$$

Mennyi a értéke, és adjuk meg ξ eloszlásfüggvényét, várható értékét és szórását! (4p)

$$a = 1 \qquad F(x) = \begin{cases} 0 & x \le 0 \\ x^3 & 0 < x \le 1 \\ 1 & 1 < x \end{cases} \qquad M(\xi) = \int_0^1 x \cdot 3x^2 dx = \tfrac{3}{4} \qquad M(\xi^2) = \int_0^1 x^2 \cdot 3x^2 dx = \tfrac{3}{5}$$

$$D(\xi) = \sqrt{\tfrac{3}{5} - \left(\tfrac{3}{4}\right)^2} = \tfrac{1}{20}\sqrt{3}\sqrt{5} = 0.193\,65$$

8. Egy alkatrész élettartama exponenciális eloszlású valószínűségi változó 200 óra várható értékkel.

(a) Mennyi annak valószínűsége, hogy az alkatrész 100 óra előtt elhasználódik? (2p)
$P(\xi < 100) = 1 - e^{-\frac{100}{200}} = 0.393\,47$

(b) Legalább mekkora élettartamra számíthatunk 0.9 valószínűséggel? (2p)
$P(\xi > x) = e^{-\frac{x}{200}} = 0.9 \qquad x = -200 \cdot \ln(0.9) = 21.\,072$

9. Legyen $\xi \in \mathcal{N}(2;3)$, adjuk meg annak valószínűségét, hogy

(a) ξ értéke 1 és 4 közé esik? (2p)
$P(1 < \xi < 4) = \Phi\left(\frac{4-2}{3}\right) - \Phi\left(\frac{1-2}{3}\right) = 0.747\,51 - 0.369\,44 = 0.378\,07$

(b) ξ^2 értéke legfeljebb 9 (2p)
$P(-3 < \xi < 3) = \text{NormalDist}\left(\frac{3-2}{3}\right) - \text{NormalDist}\left(\frac{-3-2}{3}\right) = 0.630\,56 - 0.047\,79 = 0.582\,77$

(c) Legalább mennyi lesz két ilyen eloszlású független valószínűségi változó összege 90%-os valószínűséggel? (3p)
$\xi_1 + \xi_2 \in \mathcal{N}\left(4; 3\sqrt{2}\right) \quad P(\xi_1 + \xi_2 \ge x) = 1 - \text{NormalDist}\left(\frac{x-4}{3\sqrt{2}}\right) = 0.9 \quad \frac{x-4}{3\sqrt{2}} = -1.28 \quad x = -1.\,430\,6$

10. Egy tantárgyból vizsgázó 120 hallagtó közül 15 hallgató bukott meg. Milyen határok között van a bukási arány ebből a tantárgyból 90%-os biztonsággal? (3p)

$$p \approx \frac{15}{120} \pm 1.645 \cdot \frac{1}{\sqrt{120}}\sqrt{\frac{15}{120} \cdot \frac{105}{120}} \begin{matrix} \nearrow & 0.17466 \\ \searrow & 0.07533 \end{matrix}$$