Napier pálcikák és a rácsmódszer

A zsebszámológépek, "csökkenő" tananyag és lustuló (?) diákok korában a számolási készségek és hajlandóságok természetesen rohamosan csökkennek. Éppen ezért gondolom úgy, hogy minden lehetőséget meg kell ragadnunk a tanulók "becserkészéséhez": talán a 2. fejezet hozhat egy kis lelkesedést a nebulóknak és barkácsolni vágyó (de csak íróasztal mellett ülő) apukájuknak.

A cikkben leírt eszközök és módszerek sok helyen, elszórva megtalálhatók az interneten, de legtöbbször magyarázatok nélkül.

1. A pálcikák

Napiers_Bones1.jpg, 600kB, Forrás: https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/7/73/Napier%27s_Bones.JPG

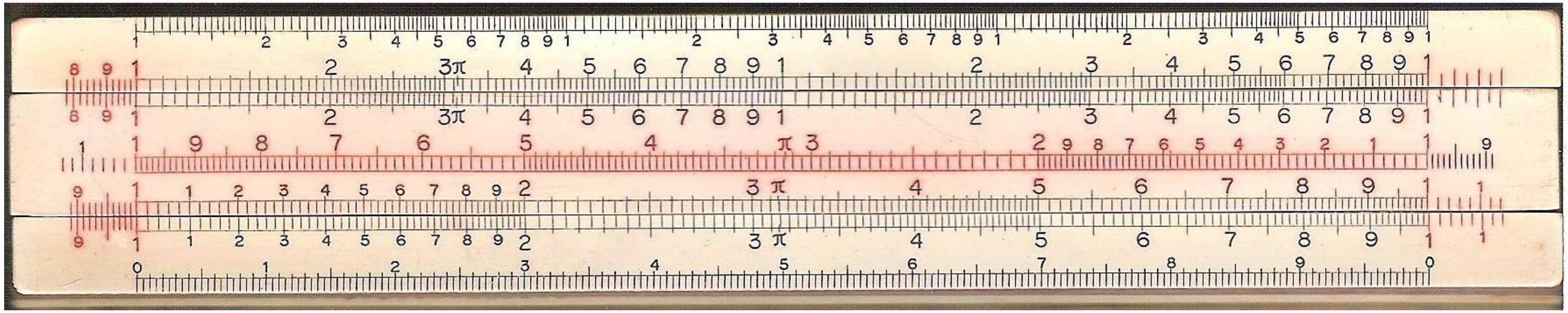
1a. ábra: Napier-pálcikák elefántcsontból, bőrtokban [1]


Square

Napiers_Bones2.jpg, 80kB, Forrás: *Pap Gyula* https://picasaweb.google.com/109183040810047976567/200811Bonn#5269988323735400882

1b. ábra: Napier-pálcikák fémtokban

Angolul *bones* (csontok), hiszen a fenti képeken is jól láthatók a díszes bőr- és fémdobozban az értékes *elefántcsont* (!) rudacskák, a praktikus csomagolás alapján pedig felismerjük bennük a XVII.sz. tudósainak és mérnökeinek *zsebszámológépét*! **John Napier** (1550-1617) skót matematikus és természettudós **1614** körül írta le ezeket a számolási segédeszközöket. Érdekes, hogy körülbelül ugyanekkor tette közzé a logaritmusról szóló felfedezéseit is, amelyek pedig a korszerűbb *logarlécek* elméleti alapjai. Logarléceket ugyan már **1630** -tól használtak, de a rudacskákkal többjegyű számokkal és nagyobb pontossággal lehetett számolni, a logarlécek pontossága pedig legfeljebb 4 jegy (**[1]**, **[2]**, **[3]**). Emiatt volt még a XIX. szd. végén is nagy jelentősége *Genaille rudacskáinak*, amit az 5. fejezetben nutatunk be.

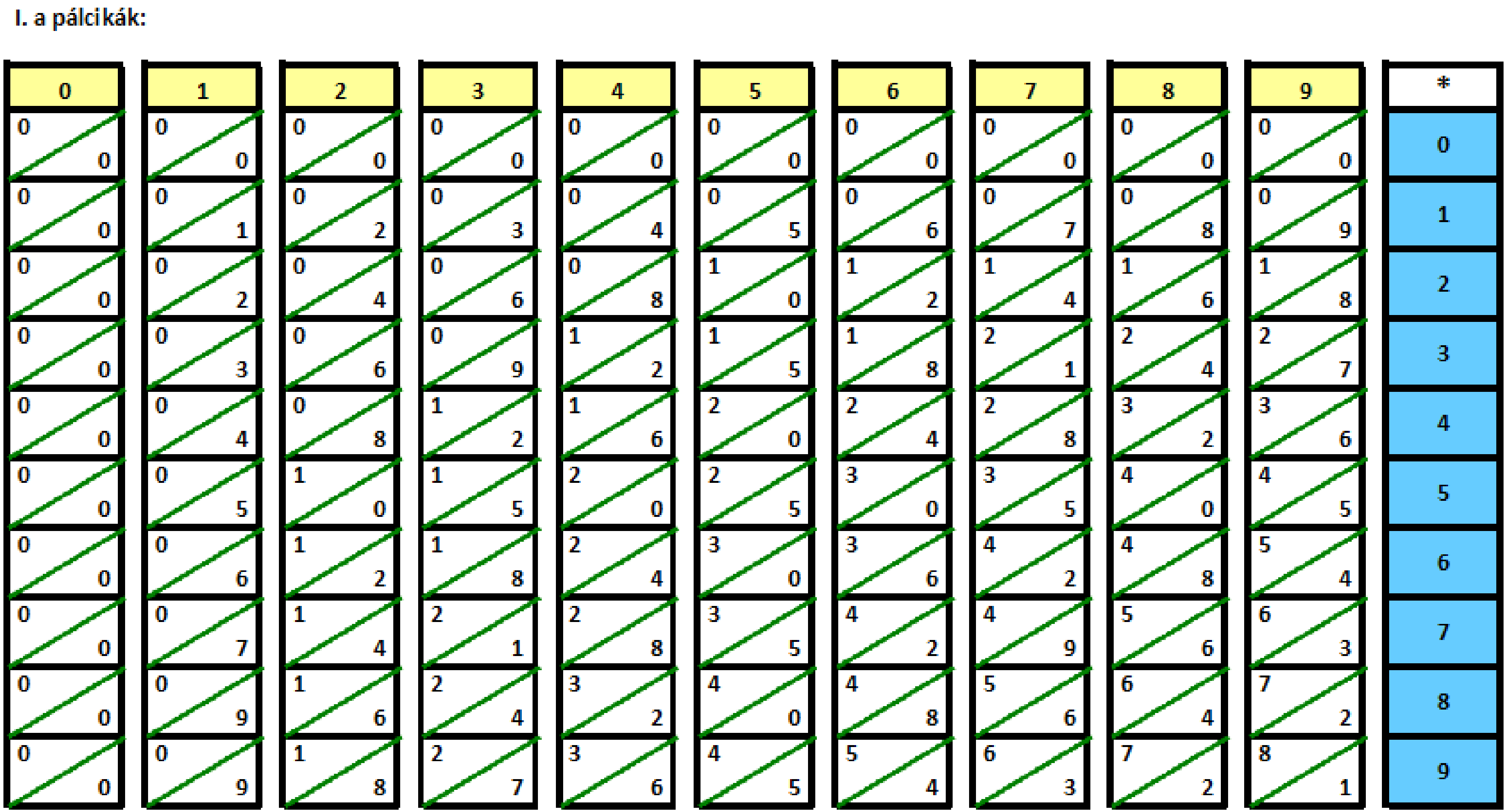


sk-lec-kozepso.jpg, 330kB,

2. ábra: Zseblogarléc, (~1960)

Közelebbről megvizsgálva a **pálcikákat** láthatjuk, hogy *pontosan* az általános iskolai szorzótábla található a négyszögletes hasábok oldalain, "puska" -szerűen átalakítva a mindennapi számolások megkönnyítéséhez. Ez már önmagában indolkolttá tenné a pálcikák órai használatát! Persze jó, ha a tanulók (és mi is) fejből tudjuk a szorzótáblát, de első ismerkedéskor is "játszhatnak" vele a kisdiákok, sőt a tízes átvitelt is szemléltethetjük a pálcikákal. (A XVII.sz. mérnökeinek pedig nagyon megkönnyítette mindennapi feladatait, logarléc és elektronikus zsebszámológép híján!)

A pálcikák (négyzet alapú hasábok) oldalaira az alábbi ábrán látható papírcsíkok vannak ragasztva (bevésve), de iskolai használatra a hasábok feleslegesek. Elegendő csak rajz- vagy inkább vastagabb kartonlapra rajzolnunk (nyomtatnunk és ragasztanunk) az alábbi 11 -féle függőleges kis csíkot:



Napier-sk-1.png, 55kB,

3. ábra: A Napier pálcikák feliratai

Igen, jól látjuk: a *szorzótábla* van függőlegesen csíkokra szabdalva, a tízes átvitelek a ferde átlók felett külön elválasztva. A **sárga** fejlécek miatt még azt sem felejtjük el, hogy melyik szám szorzatait látjuk ez egyes oszlopokban. A kék csík csak egy plusz "szamár-vezető": a számoszlopok melyik sorában mennyivel is szoroztuk a sárga számot. Érdemes mindegyik csíkból több példányt készítenünk (a kék kivételével), mert ezek a csíkok nem csak emlékeztetőnek ("puska") jók.

Ha például a **46 785 399** számot kell megszoroznunk egy *egyjegyű* számmal, akkor csak egymás mellé teszünk sorban egy-egy **4, 6, 7, 8, 5, 3, 9** és **9** fejlécű papírcsíkot, melléjük a kék sorvezetőt, és vonalzónkat a sorvezető megfelelő sorához illesztve már diktálhatjuk is az eredményt, szokás szerint *jobbról balra*. A ferde vonalak felett (balra) a tízes maradékokat látjuk, tehát a legelső számjegy kivételével a tőle jobbra levő tízes maradékokat is a számhoz kell adnunk, az esetleg menet közben keletkező újabb maradékokkal együtt (mint ahogy eddig is tettük).

Egy bonyolultabb feladat:

46 785 399 * x = ?

II. a szorzás előkészítése /1 : 46785399 * 96431 = ?

4	6	7	8	5	3	9	9	*
0/0	0/0	0/0	0/0	0/0	0/0	0/0	0/0	0
0/4	0/6	0/7	0/8	0/5	0/3	0/9	0/9	1
0/8	1/2	1/4	1/6	1/0	0/6	1/8	1/8	2
1/2	1/8	2/1	2/4	1/5	0/9	2/7	2/7	3
1/6	2/4	2/8	3/2	2/0	1/2	3/6	3/6	4
2/0	3/0	3/5	4/0	2/5	1/5	4/5	4/5	5
2/4	3/6	4/2	4/8	3/0	1/8	5/4	5/4	6
2/8	4/2	4/9	5/6	3/5	2/1	6/3	6/3	7
3/2	4/8	5/6	6/4	4/0	2/4	7/2	7/2	8
3/6	5/4	6/3	7/2	4/5	2/7	8/1	8/1	9

Napier-sk-2.png, 60kB,

4. ábra: Nyolcjegyű szám szorzása egyjegyűvel

A pálcikák és a ferde vonalak igazi hasznát a 3. fejezetben ismerjük meg, előtte kicsit szórakozzunk.

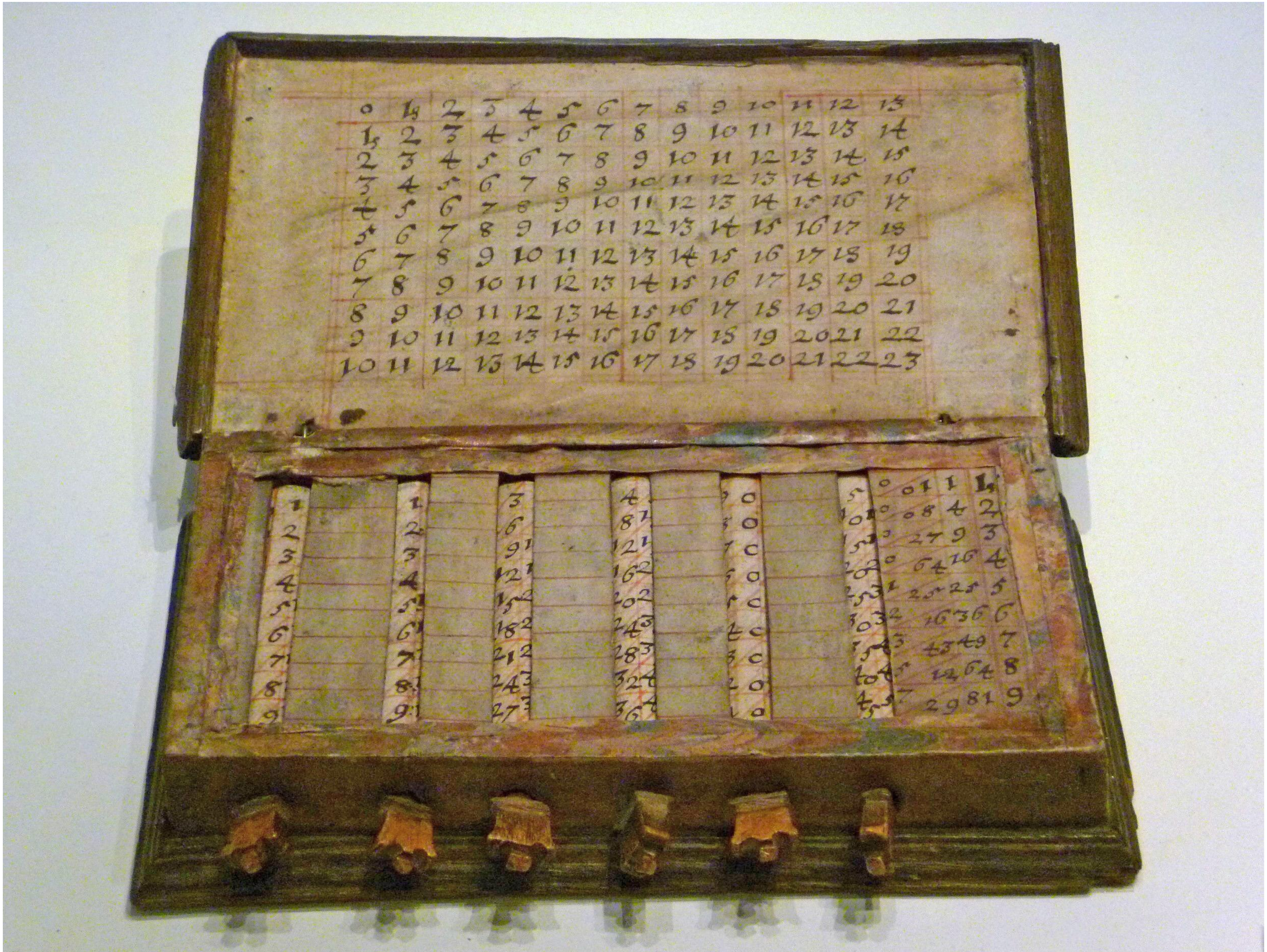
2. Kis barkácsolás

Bár a kb. 10x10 db kartonpapír-szalag használata az asztalon és tárolása (összekeverése?) a fiókban egyszerűen megoldható, az alábbi "számológép" talán a mai fiúkat és apukákat is fellelkesíti, hiszen pár dugóból, hurkapálcikából és egy kartondobozból könnyen elkészíthető:

Napier_calculating_table1.jpg, 1.3Mb,

Forrás: **[xa]** https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/f/fb/An_18th_century_set_of_Napier%27s_Bones.JPG

5. ábra: "Napier-számológép"


0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14
2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15
3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16
4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17
5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18
6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19
7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20
8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21
9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22
10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23

Napier_calculating_table2.jpg, 3.5Mb, **Forrás:** **[xb]** https://en.wikipedia.org/wiki/Napier%27s_bones

6. ábra: "Napier-számológép belülről"

Vagyis nem kell sok szalag vagy pálcika, ráadásul mindegyikből több példány (és ezeket válogatni, helyezgetni). Mondjuk hat, fel nem vágott szorzótáblát henger alakúra hajtogatunk, végeiken 2-2 dugóval és hurkapálca-tengellyel a kartondobozhoz erősítve készen is vagyunk. A 6. ábrán a gép jobb oldalán láthatjuk. a kürtőskalács-sütő, vagy inkább egy szabadtéri grillsütő hengereihez hasonló alkotásunkat. (A dugók kerületét és a körbehajtogatott szorzótáblák szélességét ugye szinkronizálják, kedves Apukák, és az oszlopok sárga fejléceiről sem feledkeznek meg!)

Hogy kiemeljük a bennünket érdeklő oszlopokat, érdemes függőleges ablakokkal ellátott fedőlapot helyeznünk a gépre, hiszen a "kürtőskalács" hengereknek csak a megfelelő (legfelső) oszlopára vagyunk kíváncsi: a kérdéses (sárga) szám többszöröseire. A fedőlap jobb szélére a hiányzó **kék** "szamárvezetőt" is festhetjük, ekkor ismét a 4. ábrán látható elrendezést látjuk, a gombokat csak tekergetnünk és a számokat csak leolvasnunk kell!

Az 5. ábrán látható "gép" fedőlapjának jobbján a **kék** "szamárvezető" helyett a négyzet- és köbszámokat láthatjuk, a dobozfedő belsejében pedig az összeadó táblázatot (újabb "puska").

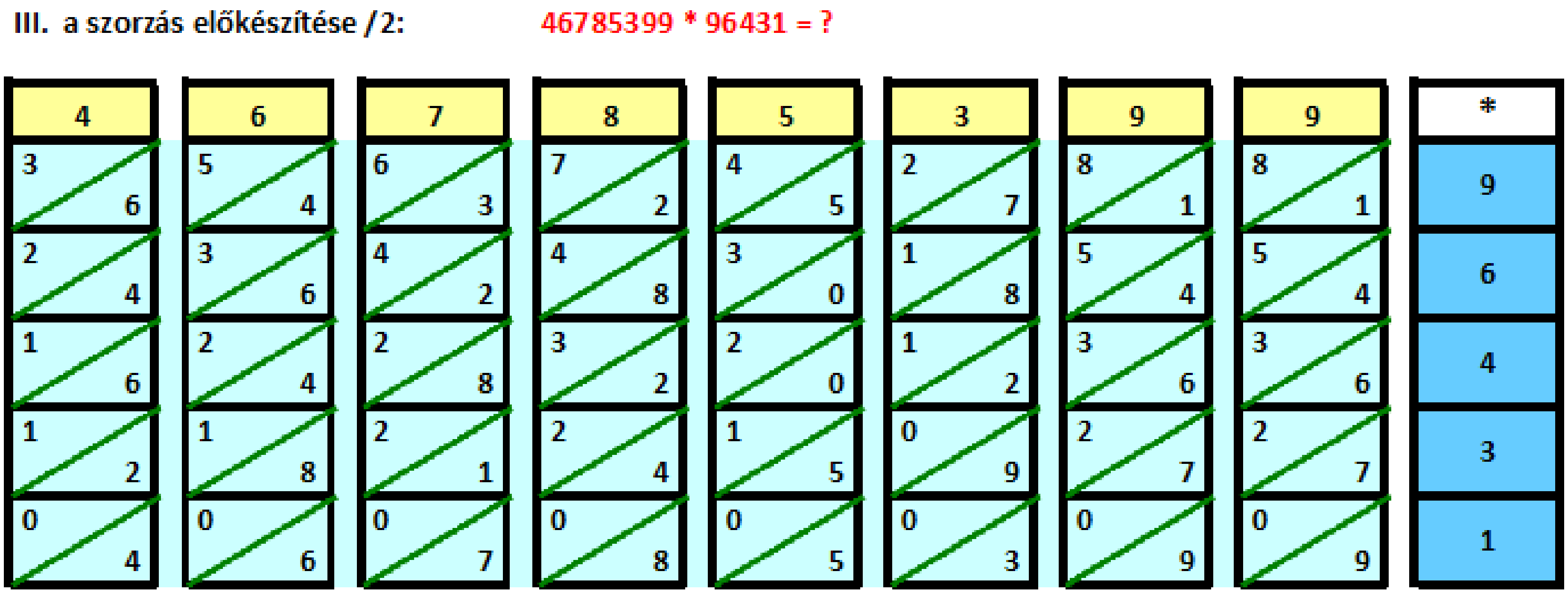
A Napier-pálcikák (és a ferde vonalak) igazi előnyét azonban a **rácsmódszerben** ismerhetjük meg, ráadásul ezzel a módszerrel már többjegyű számokkal is könnyen szorozhatjuk kedvenc **46 785 399** számunkat!

3. A rácsmódszer

A **rácsmódszert** angolul *lattice multiplication* -nak, olaszul *gelosia*/*gelusia* módszernek hívják, de ismertek még a *Velencei négyzetek*, a *Hindu rács* és a *Shabakh* elnevezések is (ld. [4]).

Példaként lássuk a **46 785 399 x 96 431** (hű, de nagy!) szorzat kiszámolását!

Először tegyük magunk elé a 4.ábrán elhelyezett pálcikákat. Ebből a táblázatból a szorzó számjegyeinek megfelelő sorokat (legnagyobb helyiértéktől kezdve) másoljuk le egymás alá, amint az alábbi ábrán láthatjuk. Az oszlopok között nem kell hézagokat hagynunk.

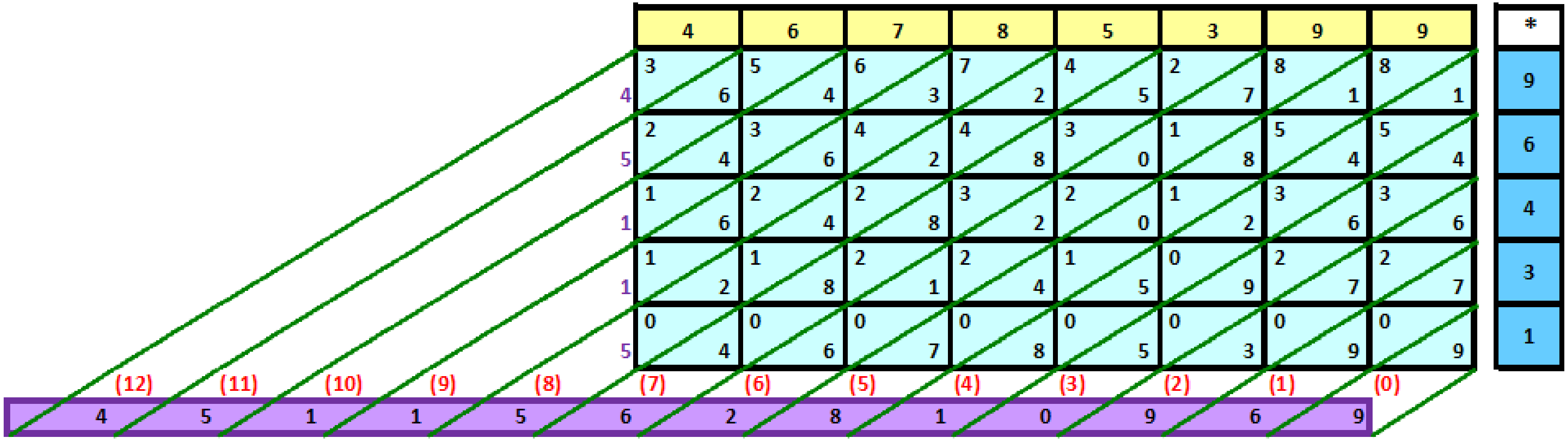


Napier-sk-3.png, 33kB,

7. ábra: A rácsmódszer előkészítése

Ezután már csak a ferde (**zöld**) átlókban levő sok számot kell összeadnunk és a végeredményt a **lila** sorba írnunk. Természetesen az összeadásokat a jobboldali (egyelemű) átlóval kezdjük, és a tízes átviteleket is a (balra) következő átlóhoz adnunk. Az ábra bal alsó sarkában ezeket a részletszámításokat láthatjuk, a sorok végén levő piros számok a tízes átviteleket jelölik.

IV. a szorzás befejezése: 46 785 399 * 96 431 = ?

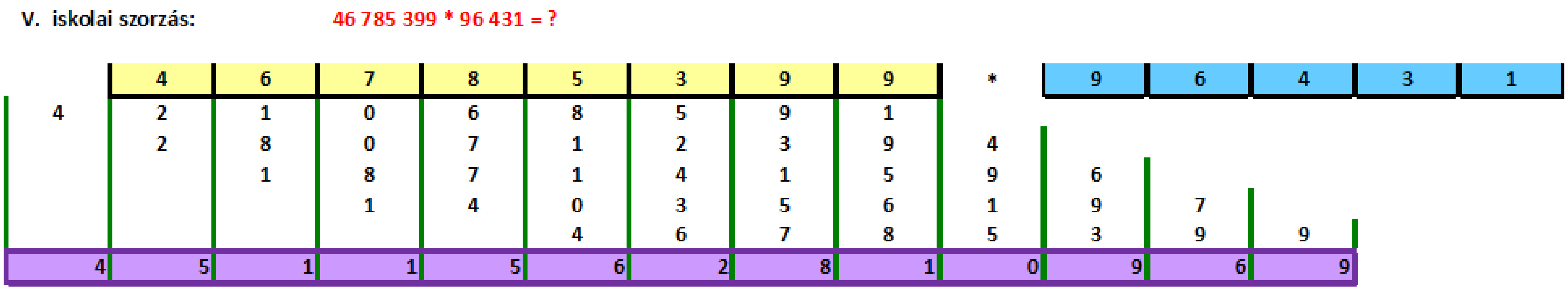


(0) 9 = 9
(1) 7+0+9 = 1*10 + 6
(2) 1+6+2+7+0+3 = 1*10 + 9
(3) 1+4+3+6+2+9+0+5 = 3*10 + 0
(4) 3+1+5+4+3+2+0+5+0+8 = 3*10 + 1
(5) 3+8+1+5+8+1+0+1+4+0+7 = 3*10 + 8
(6) 3+8+7+1+0+2+2+2+1+0+6 = 3*10 + 2
(7) 3+2+5+3+8+3+8+2+8+0+4 = 4*10 + 6
(8) 4+4+2+4+2+2+4+1+2+0 = 2*10 + 5
(9) 2+7+3+4+6+2+6+1 = 3*10 + 1
(10) 3+6+4+3+4+1 = 2*10 + 1
(11) 2+5+6+2 = 1*10 + 5
(12) 1+3 = 4

Napier-sk-4.png, 73kB, 100%

8. ábra: A rácsmódszer - szorzás

Egyszerű másolgatós és összeadós módszer. Alaposabban szemügyre véve láthatjuk, hogy majdnem ugyanaz, mint ahogyan mi is az általános iskolában tanultuk. Csak mi az átlók helyett a sorokat egy-egy helyiértékkel eltolva, a számokat paralelogramma alakban írjuk le a papírra, és emellett a maradékokat állandóan a fejünkben kellett tartanunk és hozzáadnunk a következő számhoz:



Napier-sk-5.png, 11kB, 100%

9. ábra: Az iskolai szorzás

A rácsmódszer annyivel egyszerűbb, hogy különválasztja az "adatok" papírra írását és az összeadásokat, a tízes átvitellel együtt.

A rácsmódszerhez használt papír négyzetrácsa legalább 1x1 cm méretű négyzetekből kell, hogy álljon (világoszöld a 8. ábrán), hiszen két-két számjegyet kell beleírnunk (akár meghúzzuk az / átlót, akár nem). A gyakorlatban néha az átlókat nem hosszabbítják meg egészen a lila eredményvonalig, hanem az eredmény számjegyeit rögtön a táblázat alsó és bal széleihez írják, mint az ábrán mi is írtuk az **5, 1, 1, 5, 4** számjegyeket.

4. Schickard gépe

Wilhelm Schickard (1592-1635) német matematikus **1623**-ban Keplernek küld levélben terveket egy mechanikus számológépről **[5]**, **[6]**, **[7a]**, **[7b]**. A következő fényképen látható gép 1960-ban készült, működőképes rekonstruciója látható.


2
3
4
5
6
7
8
9
2
3
4
5
6
7
8
9

Schickardmaschine1623.jpg, 480kB,
Forrás: http://www.wikiwand.com/hu/Wilhelm_Schickard

10. ábra: Schickard gépe

A gép függőleges részében az általunk barkácsolt "kürtőskalács" hengerek vannak, az előttük vízszintesen elhúzható zsalukkal el- és kitakarhatjuk a megfelelő sorokat - éppen melyik számjeggyel szorozzuk a hengereken felül beállított számot. A szorzótáblán látható számokat és az / átlókkal elválasztott tízes maradékokat az alul levő réz gombokkal kell tekergetve beállítanunk, és ezt a fogaskerekes számláló (mint az autók és a villanyóra számlálója) *összeadja* helyettünk. Ez utóbbi Schikard nagy találmánya, nem kell papír és összeadás fejünkben átlósan. Helyette azonban arra *nekünk kell* ügyelnünk, hogy a szorzandónak éppen melyik helyiértékén levő számjegyével szorzunk, mert ennek megfelelően a (függőleges) szorzótáblán látható adatokat és tízes maradékaikat a helyiértéknek megfelelően egy-egy helyiértékkel balra kell tolnunk! Itt sajnos már a ferde átlók nem segítenek, így véleményem szerint Schickard gépével nem egyszerűbb a számolás mint a rácsmódszerrel, hibalehetőség itt is van bőven. Schikard gépének működését részletesebben például az alábbi videóból ismerhetjük meg: **[8].**

Érdekes még a szorzótábla (pontosabban a tízes átvitelek) következő grafikus változata is.

5. A Genaille-Lucas vonalzók

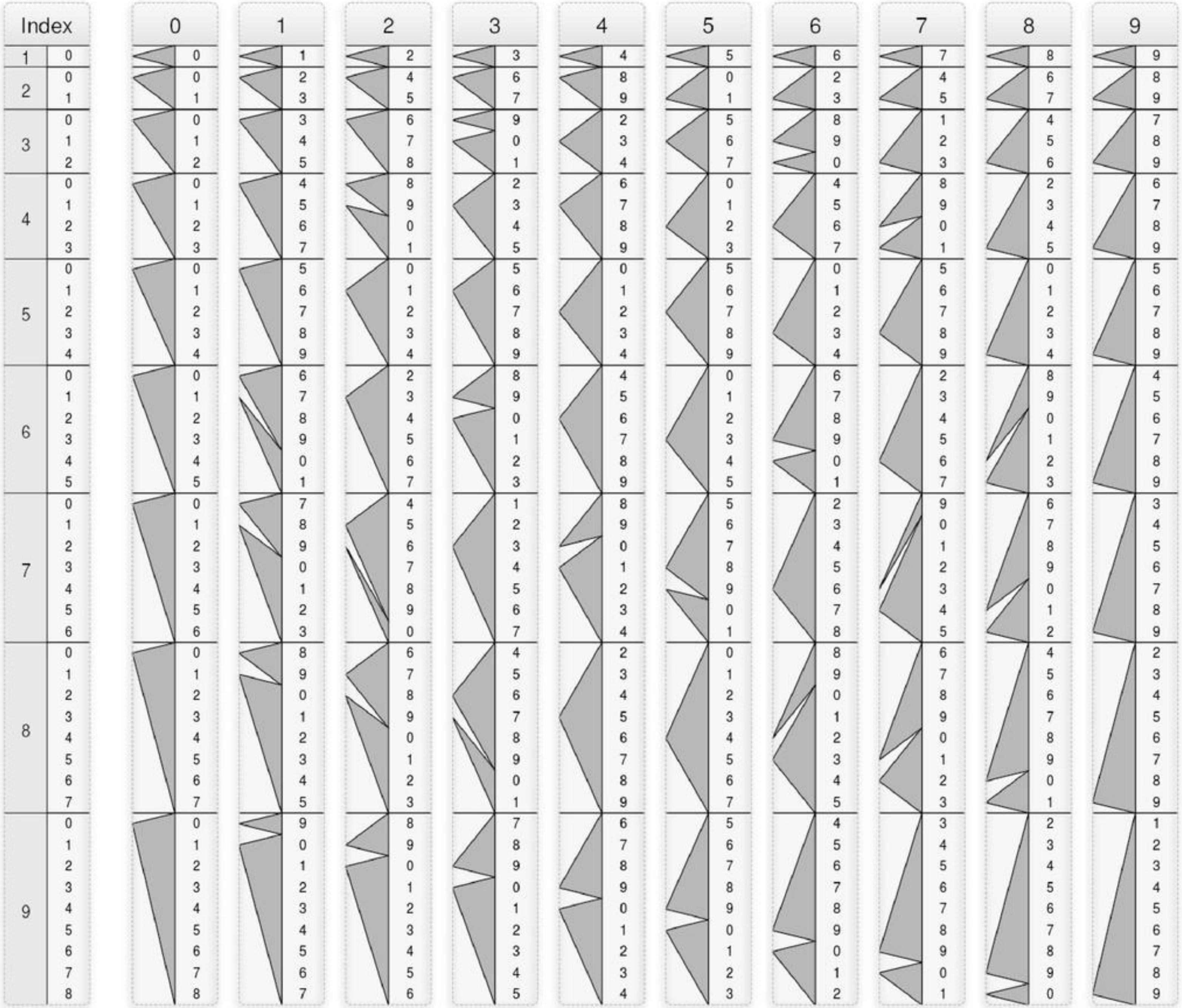
Első ránézésre ez egy különös szorzótábla (**[9]**, nagy méretben a **[10a], [10b]** címeken található):

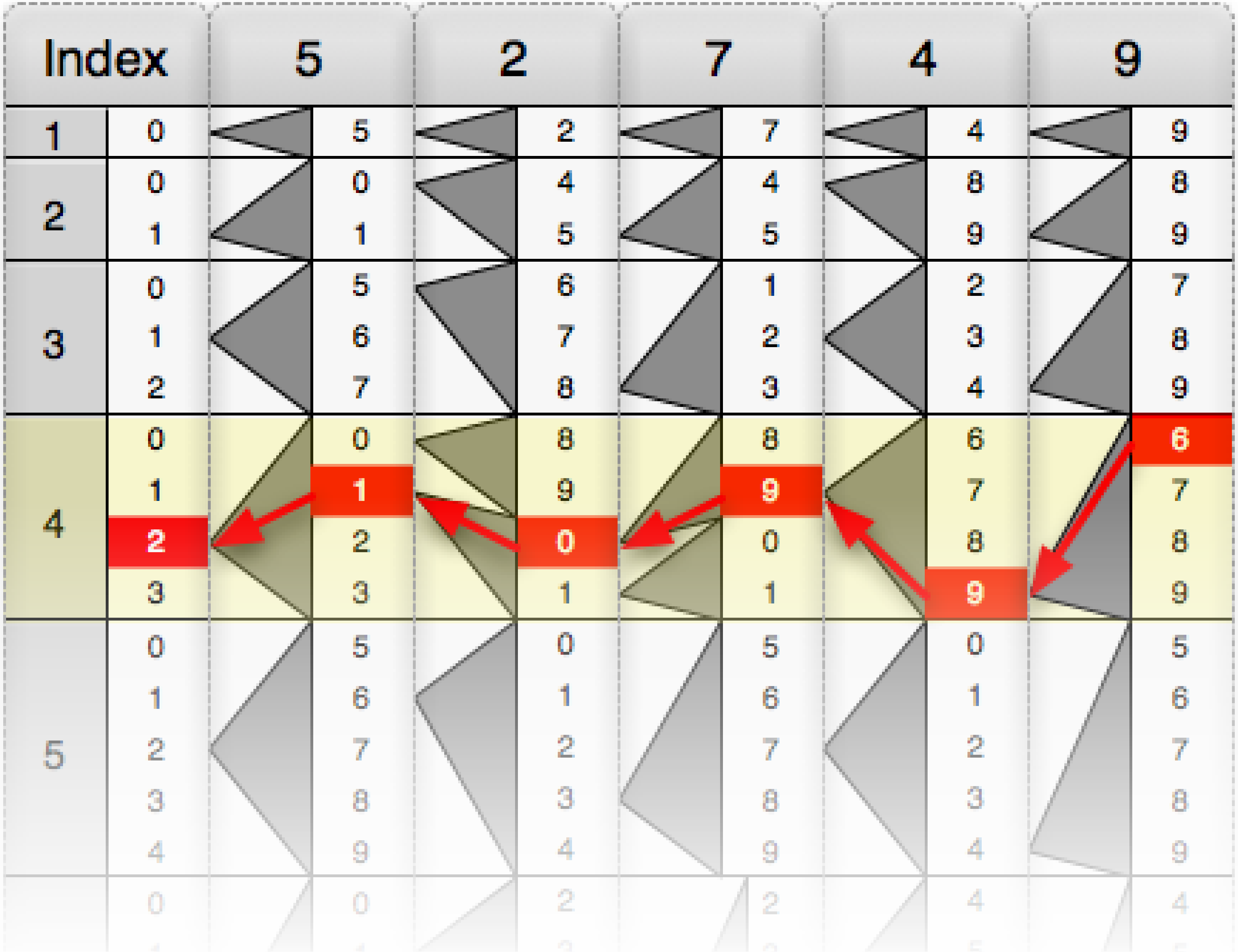
Henri Genaille francia vasúti mérnök **1891**-ben találta fel a Napier pálciák fenti változatát, (Genaille-*rudacskáknak* is nevezik), amikkel sikerült megoldania **Édouard Lucas** (1842-1891) francia matematikusnak egy 1885-ben felvetett aritmetikai problémáját is (**[9]**, **[12]**).

A nagy ötlet az,hogy a maradékokat, vagyis a tízes átviteleket nem az / átlók felett (bal oldalon) találhatjuk egy-egy számjeggyel, hanem egy-egy *nyíl mutat* éppen a ‚egfelelő egységgel lefelé, a következő (balra levő) rúdon éppen arra a számra mutatva, amennyi a maradéknak a következő számhoz adásakor lenne a végeredmény. Erre egy példát a 12. ábrán láthatunk (a **kék** "szamárvezetőt" **Index** felirattal a *bal oldalra* kell helyeznünk): mennyi **4 x 52 749 ?**

Genaille-Lucas-full.jpg, 290kB, 50%
Forrás: = https://en.wikipedia.org/wiki/Genaille%E2%80%93Lucas_rulers

11. ábra: A Genaille-Lucas vonalzók


Index
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9


Index
5
2
7
4
9

Genaille-Lucas-52749x4-.png, 73kB,

Forrás: **[9]** https://en.wikipedia.org/wiki/Genaille%E2%80%93Lucas_rulers
[11] https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/6/69/Genaille-Lucas_rulers_example_5.png

12. ábra: Szorzás a Genaille-Lucas vonalzókkal

A halványsárga színezés azt mutatja, hogy a rudacskáknak a 4. sorban levő részét kell tekintenünk, a **piros** útvonalon pedig egyszerűen le-olvassuk a végeredményt (jobbról balra): az eredeti (szürke) nyilak mentén a **6,9,9,0,1,2** számjegyeket vagyis a végeredmény **210 996**. Fejben nem kell számolnunk semmit, tehát a a szorzás gyorsabb és kevesebb hibát tartalmaz, mint a Napier pálcikákkal.

Ha egy egyjegyű számmal ilyen könnyen szorozhatunk akárhányjegyű számokat,akkor többjegyű számokkal is könnyen szorozhat-juk őket. Nem a 8. ábrán bemutatott rácsmódszert kell módosítanunk, hanem egyből "ugorhatunk" a 9. ábrára, a mai iskolai módszerre: a már egyszer felállított rudacskák megfelelő soraiból (a szürke nyilak mentén, jobbról balra haladva) csak másolnunk kell a 9. ábra egyes soraiba e részeredményeket, paralelogramma alakba. Igaz, az oszlopok összeadását (és ezek maradékainak továbbvitelét) még nekünk kell megtennünk, de mind a másolás, mind ez utóbbi összeadás sokkal ghyorsabb, mint a Napier-pálcikák 8.ábrán látható alkalmazása esetén.

A 11. ábra oszlopait (az Index nélkül) szintén henger alakúra hajtogathatva felragaszthatjuk dugókra, hurkapálca tengelyekkel az 5. és 6. ábrán látható "számológéphez" hasonló játékot készíthetünk.

A Genaille-rudacskák nagy népszerűségnek örvendtek a XIX. század végén, de a nemsokára elterjedt mechanikus (fogaskerekes) számológépek hamarosan kiszorították őket.

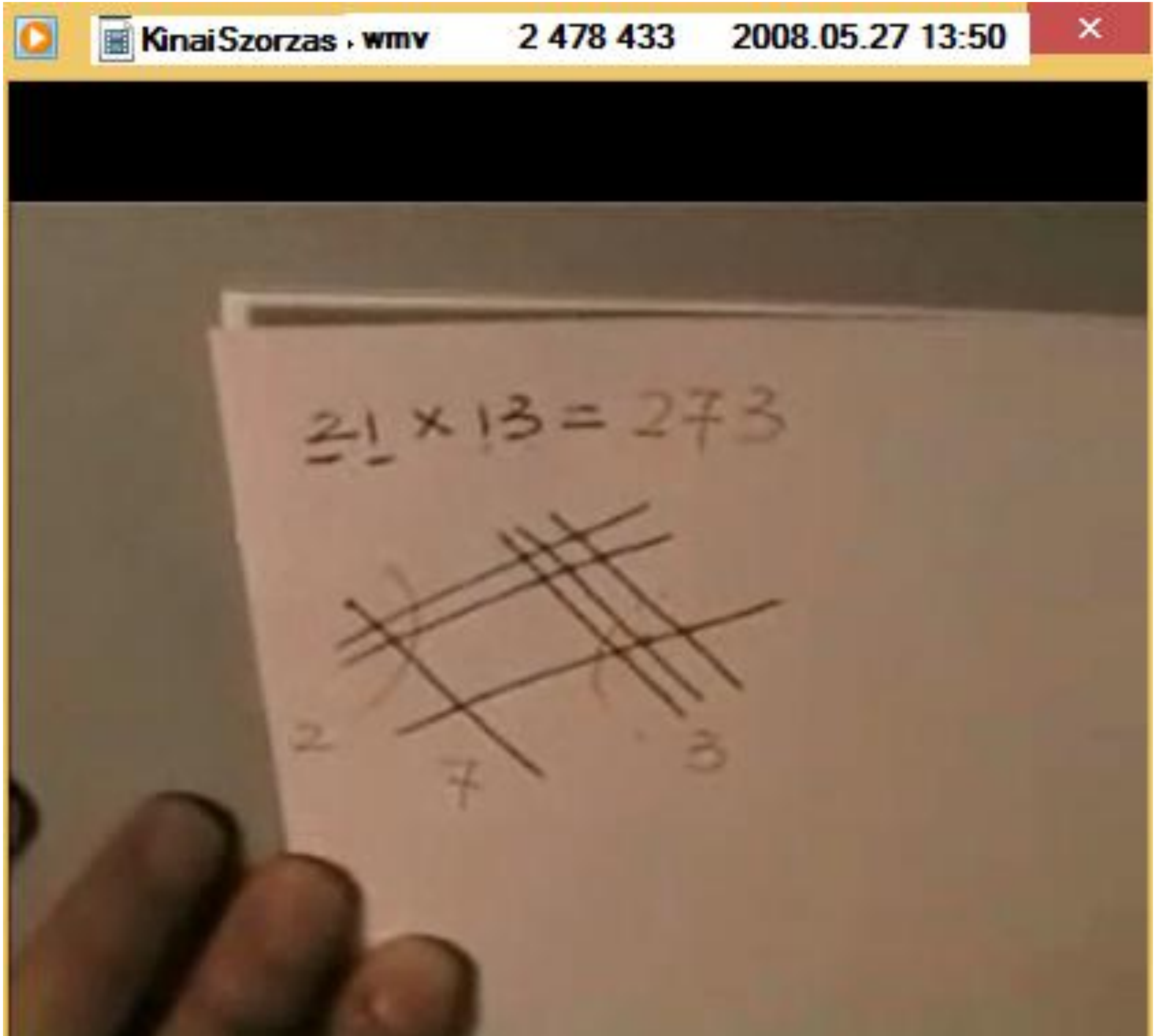
Odhner_made_before_1900.jpg, 100kB, Forrás:

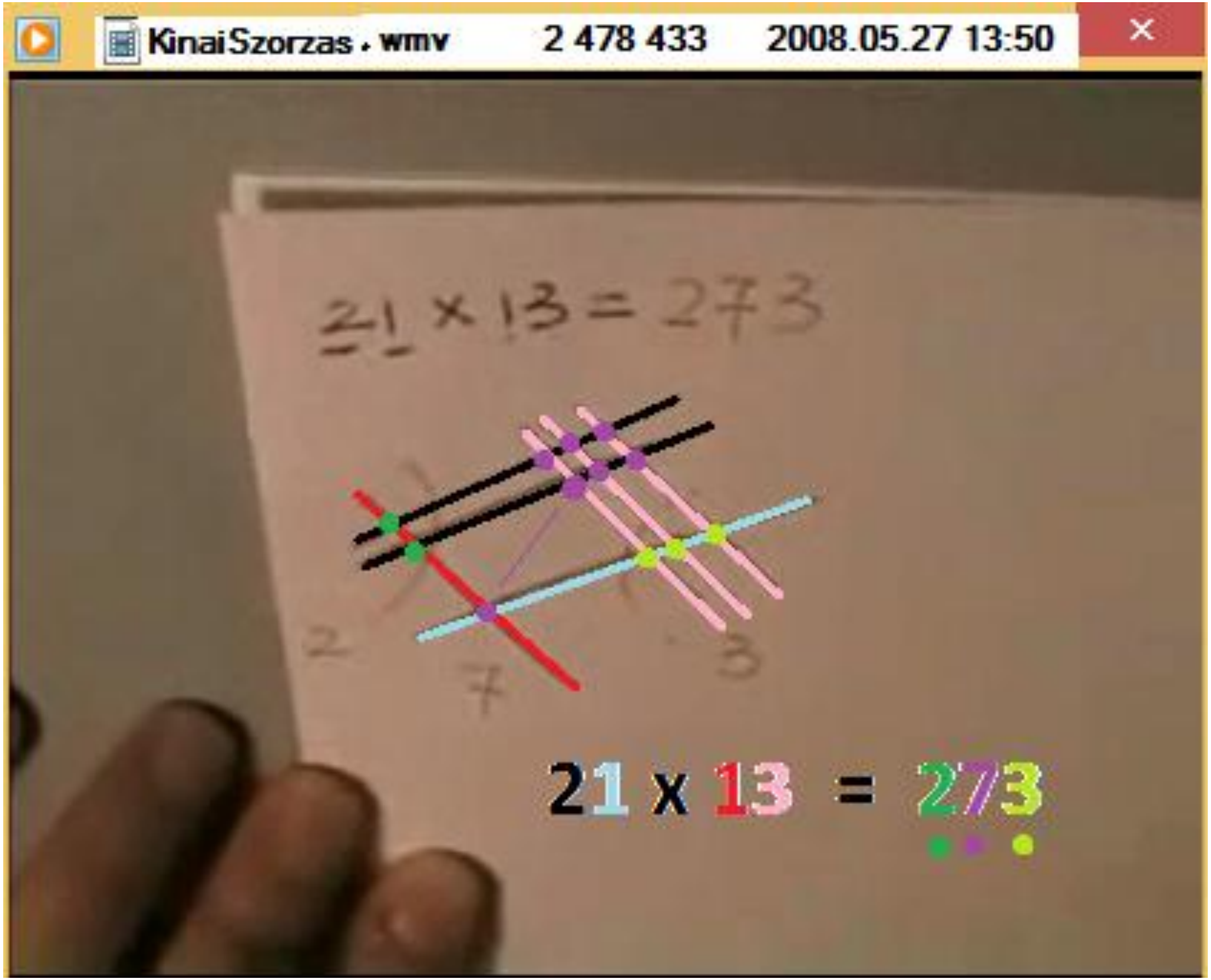
13. ábra: Odhner-féle számológép (XIX.sz.)

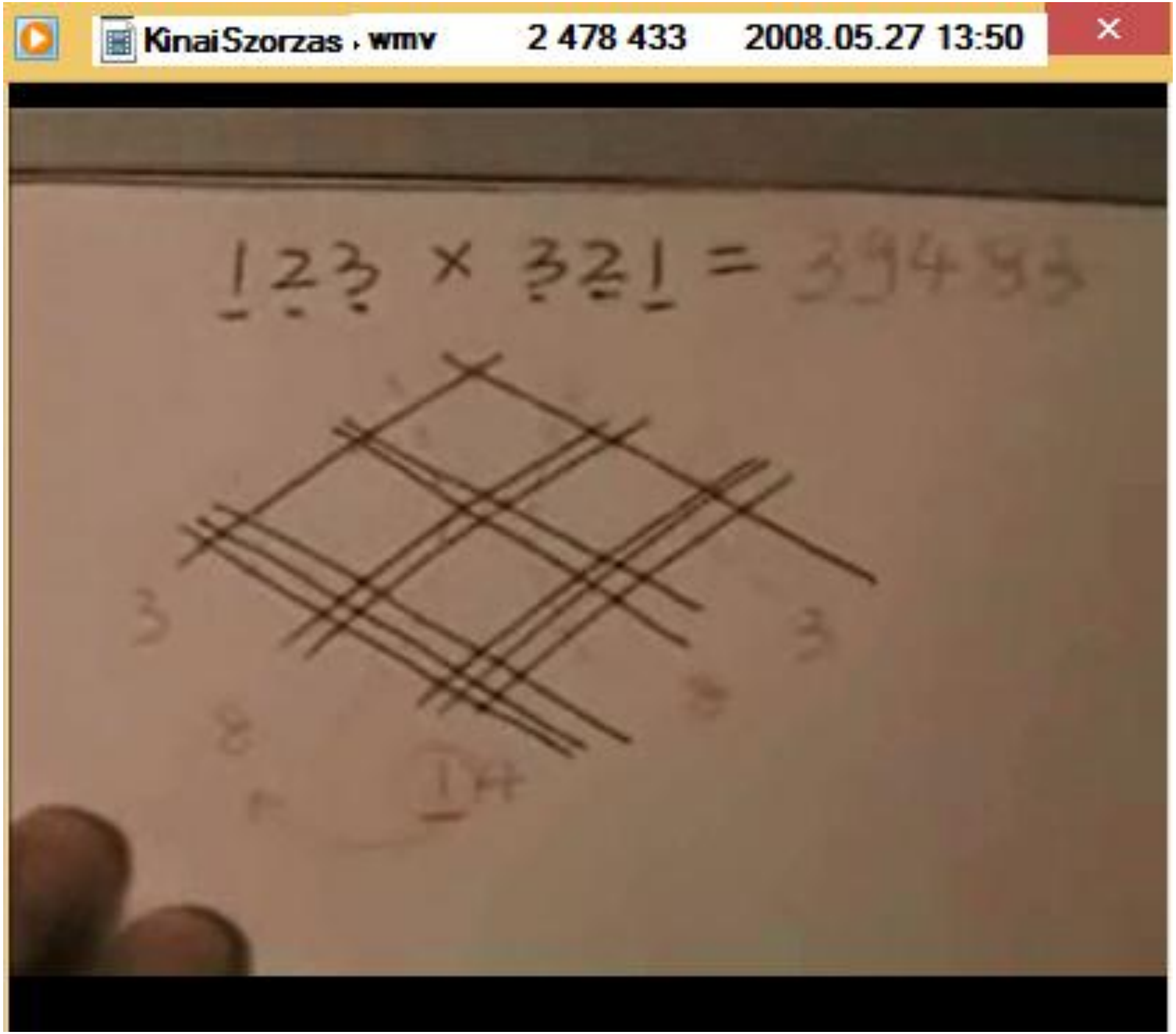
OdhnerModern_1.jpg, 40kB,

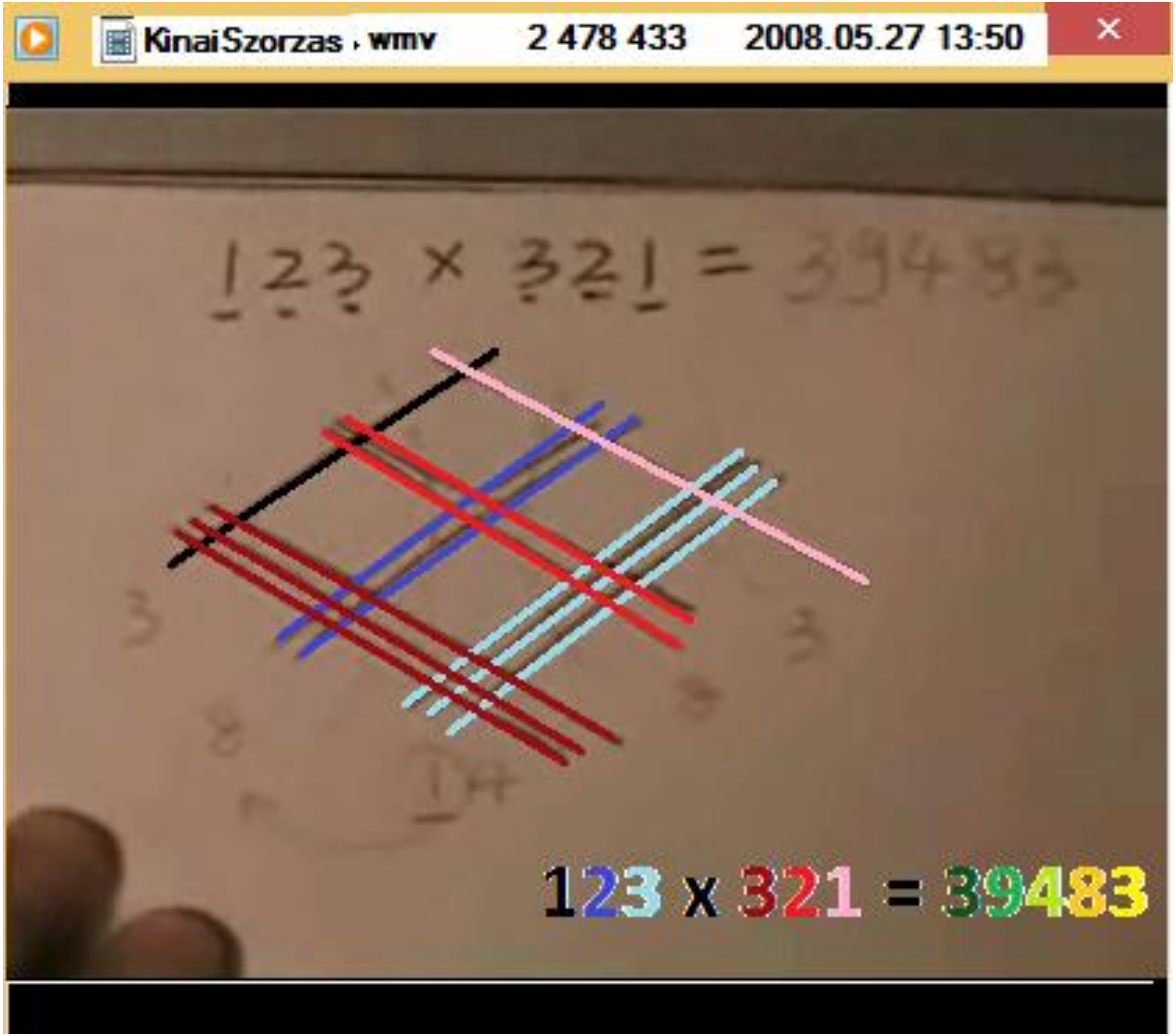
Forrás: ###

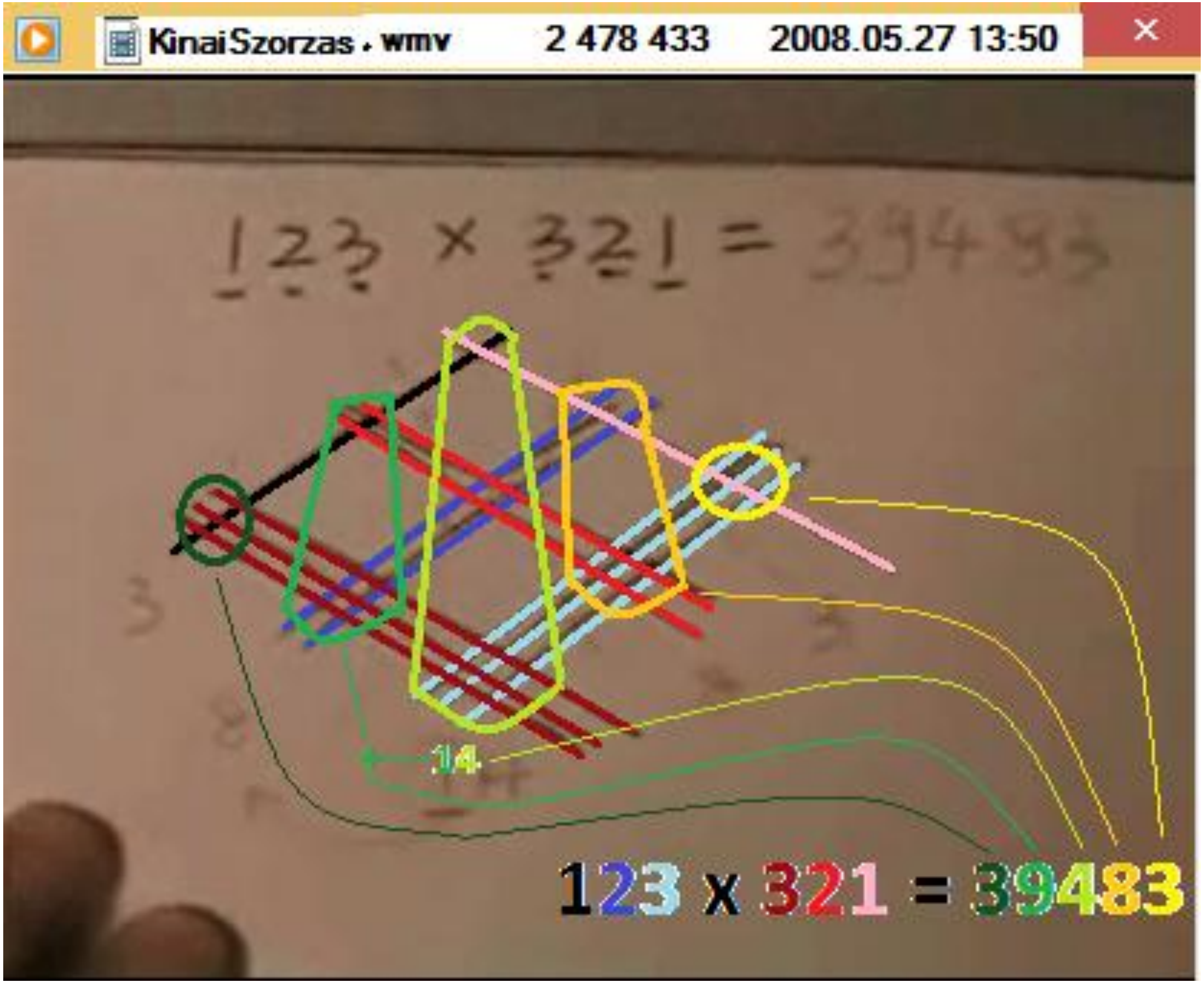
14. ábra: Odhner-féle számológép (XX.sz.)


KinaiSzorzas.wmv
2 478 433
2008.05.27 13:50
21 × 13 = 273
2
7
3


KinaiSzorzas.wmv
2 478 433
2008.05.27 13:50
21 x 13 = 273
21 x 13 = 273


KinaiSzorzas.wmv
2 478 433
2008.05.27 13:50
123 × 321 = 39483


KinaiSzorzas . wmv
2 478 433
2008.05.27 13:50
123 x 321 = 39483


KinaiSzorzas.wmv
2 478 433
2008.05.27 13:50
123 x 321 = 39483
14
123 x 321 = 39483

6. Irodalom

[1] http://hu.wikipedia.org/wiki/John_Napier_(matematikus)

[2] http://en.wikipedia.org/wiki/John_Napier

[2b] https://en.wikipedia.org/wiki/Napier%27s_bones

[3] http://hu.wikipedia.org/wiki/Logarléc

[4] http://en.wikipedia.org/wiki/Lattice_multiplication

[5] https://hu.wikipedia.org/wiki/Wilhelm_Schickard

[6] https://en.wikipedia.org/wiki/Wilhelm_Schickard

[7a] http://www.quickiwiki.com/hu/Wilhelm_Schickard

[7b] http://www.wikiwand.com/hu/Wilhelm_Schickard

[8] https://www.youtube.com/watch?v=N_uiwO8lT5c

[9] https://en.wikipedia.org/wiki/Genaille%E2%80%93Lucas_rulers

[10a] https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/7/76/Genaille-Lucas_rulers_full.svg

[10b] https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Genaille-Lucas_rulers_full.pdf

[11] https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/6/69/Genaille-Lucas_rulers_example_5.png

[12] http://en.wikipedia.org/wiki/%C3%89douard_Lucas