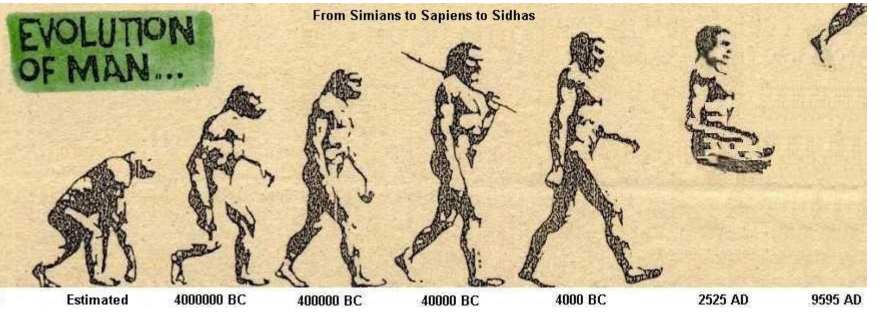
Lineáris egyenletrendszerek

(Az evolúciótól a megoldáshalmaz szerkezetéig)



dr. Szalkai István

Pannon Egyetem, Veszprém

2007-13. **/' 13.03.06 /**

Tartalom

0.a) Szemléltetés

n = 2 : síkbeli egyenesek

$$\left.\begin{aligned} a_1 x + b_1 y &= c_1 \\ a_2 x + b_2 y &= c_2 \\ &\dots \\ a_m x + b_m y &= c_m \end{aligned}\right\}$$

metszéspontok száma: 0 , 1 , végtelen **(**egyenes**)**

n = 3 : (térbeli) síkok

$$\left.\begin{aligned} a_1x+b_1y+c_1z&=d_1\\ a_2x+b_2y+c_2z&=d_2\\ &\dots\\ a_mx+b_my+c_mz&=d_m \end{aligned}\right\}$$

metszéspontok száma: 0 , 1 , végtelen **(**egyenes v. sík**)**

n > 3 : **. . .**

0.b) Pontosság:

Hasonlítsuk össze pl. az alábbi két egyenletrendszert és gyökeiket:

/1/ $\quad$ **5.0002 x - 3.7342 y = 12.1226 }**
4.9997 x - 3.7339 y = 12.1224 }

{ x = - 7.873 637
{ y = -13.789 396

/2/ $\quad$ **5.0002 x - 3.7342 y = 12.1226 }**
5.0004 x - 3.7344 y = 12.1228 }

{ x = +6.625 908
{ y = +5.625 908

Elemezzük, hogy az együtthatók kis eltérései ellenére a gyökök eltérése miért növekszik kb. **10ezer-szeres**ére ?!

I. Vektorok

Lineáris kombináció és egyenletrendszer példa

$$\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot x_1 + \begin{bmatrix} 0 \\ -7 \\ 5 \end{bmatrix} \cdot x_2 + \begin{bmatrix} -5 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot x_3 + \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 8 \end{bmatrix} \cdot x_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix}$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{bmatrix} 3x_1 \\ -1x_1 \\ 0x_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \cdot x_2 \\ -7 \cdot x_2 \\ 5 \cdot x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -5 \cdot x_3 \\ 4 \cdot x_3 \\ 1 \cdot x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \cdot x_4 \\ 1 \cdot x_4 \\ 8 \cdot x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix}$$

$$\Updownarrow$$

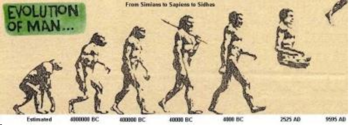
$$\begin{bmatrix} 3x_1 + 0 \cdot x_2 - 5 \cdot x_3 + 2 \cdot x_4 \\ -1x_1 - 7 \cdot x_2 + 4 \cdot x_3 + 1 \cdot x_4 \\ 0x_1 + 5 \cdot x_2 + 1 \cdot x_3 + 8 \cdot x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix}$$

$$\Updownarrow$$

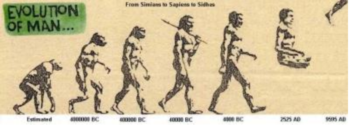
$$\begin{array}{rrrrcl} 3x_1 & + & -5x_3 & +2x_4 & = & 1 \\ -x_1 & -7x_2 & +4x_3 & +x_4 & = & 0 \\ & 5x_2 & +x_3 & +8x_4 & = & 6 \end{array}$$

Tehát:

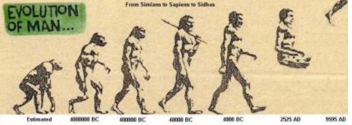
Vektorok lineáris kombinációja $\Longleftrightarrow$ *lineáris egyenletrendszer*



$$\left.\begin{array}{ccccccccc}
a_{1,1}\cdot x_1 & + & a_{1,2}\cdot x_2 & + & \ldots & + & a_{1,n}\cdot x_n & = & b_1 \\
a_{2,1}\cdot x_1 & + & a_{2,2}\cdot x_2 & + & \ldots & + & a_{2,n}\cdot x_n & = & b_2 \\
a_{3,1}\cdot x_1 & + & a_{3,2}\cdot x_2 & + & \ldots & + & a_{3,n}\cdot x_n & = & b_3 \\
\vdots & & \vdots & & \ldots & & \vdots & & \vdots \\
a_{m,1}\cdot x_1 & + & a_{m,2}\cdot x_2 & + & \ldots & + & a_{m,n}\cdot x_n & = & b_m
\end{array}\right\}$$

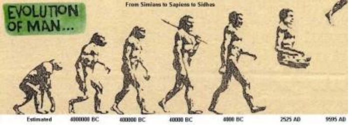


$$\begin{bmatrix} a_{1,1} \\ a_{2,1} \\ a_{3,1} \\ \vdots \\ a_{m,1} \end{bmatrix} \cdot x_1 + \begin{bmatrix} a_{1,2} \\ a_{2,2} \\ a_{3,2} \\ \vdots \\ a_{m,2} \end{bmatrix} \cdot x_2 + \ldots + \begin{bmatrix} a_{1,n} \\ a_{2,n} \\ a_{3,n} \\ \vdots \\ a_{m,n} \end{bmatrix} \cdot x_n = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

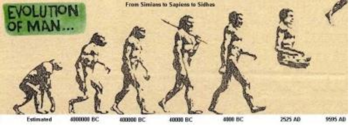


$$\begin{bmatrix} a_{1,1} \\ a_{2,1} \\ a_{3,1} \\ \vdots \\ a_{m,1} \end{bmatrix} \cdot x_1 + \begin{bmatrix} a_{1,2} \\ a_{2,2} \\ a_{3,2} \\ \vdots \\ a_{m,2} \end{bmatrix} \cdot x_2 + \ldots + \begin{bmatrix} a_{1,n} \\ a_{2,n} \\ a_{3,n} \\ \vdots \\ a_{m,n} \end{bmatrix} \cdot x_n = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

$$\boxed{\underline{a}_1 \cdot x_1 + \underline{a}_2 \cdot x_2 + \ldots + \underline{a}_n \cdot x_n = \underline{b}}$$

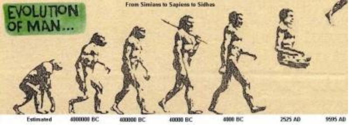


$$\begin{bmatrix} a_{1,1} \\ a_{2,1} \\ a_{3,1} \\ \vdots \\ a_{m,1} \end{bmatrix} \cdot x_1 + \begin{bmatrix} a_{1,2} \\ a_{2,2} \\ a_{3,2} \\ \vdots \\ a_{m,2} \end{bmatrix} \cdot x_2 + \ldots + \begin{bmatrix} a_{1,n} \\ a_{2,n} \\ a_{3,n} \\ \vdots \\ a_{m,n} \end{bmatrix} \cdot x_n = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$



$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & \cdots & a_{3,n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

© " Ha egy mátrixot szorzunk oszlopvektorral, akkor a mátrix oszlopvektorainak lineáris kombinációját kapjuk, ahol az együtt-hatók a vektor komponensei. " ©



$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & \cdots & a_{3,n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

$$\boxed{\underline{\underline{A}} \cdot \underline{x} = \underline{b}}$$

Megoldás elemi bázistranszformációval:

	$\underline{\mathbf{a}}_{\mathbf{1}}$	$\underline{\mathbf{a}}_{\mathbf{2}}$	…	$\underline{\mathbf{a}}_{\mathbf{n}}$	$\underline{\mathbf{b}}$
$\underline{\mathbf{e}}_{\mathbf{1}}$	$a_{1,1}$	$a_{1,2}$	…	$a_{1,n}$	b_1
$\underline{\mathbf{e}}_{\mathbf{2}}$	$a_{2,1}$	$a_{2,2}$	…	$a_{2,n}$	b_2
…	…	…	…	…	…
$\underline{\mathbf{e}}_{\mathbf{m}}$	$a_{m,1}$	$a_{m,2}$	…	$a_{m,n}$	b_m

• • • • •

	$\underline{\mathbf{a}}_1$	$\underline{\mathbf{a}}_2$	…	$\underline{\mathbf{a}}_n$	$\underline{\mathbf{b}}$
$\underline{\mathbf{e}}_t$	**0**	**0**	…	**0**	**?**$_t$
$\underline{\mathbf{a}}_i$	$\alpha_{2,1}$	$\alpha_{2,2}$	…	$\alpha_{2,n}$	β_2
…	…	…	…	…	…
$\underline{\mathbf{a}}_j$	$\alpha_{m,1}$	$\alpha_{m,2}$	…	$\alpha_{m,n}$	β_m

$$\underline{\mathbf{a}}_1 \cdot x_1 + \underline{\mathbf{a}}_2 \cdot x_2 + \ldots + \underline{\mathbf{a}}_n \cdot x_n = \underline{\mathbf{b}}$$

	$\underline{\mathbf{a}}_1$	$\underline{\mathbf{a}}_2$	…	$\underline{\mathbf{a}}_n$	$\underline{\mathbf{b}}$
$\underline{\mathbf{e}}_t$	**0**	**0**	**…**	**0**	**$?_t$**
$\underline{\mathbf{a}}_i$	$\alpha_{2,1}$	$\alpha_{2,2}$	…	$\alpha_{2,n}$	β_2
…	…	…	…	…	…
$\underline{\mathbf{a}}_j$	$\alpha_{m,1}$	$\alpha_{m,2}$	…	$\alpha_{m,n}$	β_m

$$\underline{\mathbf{a}}_1 \cdot x_1 + \underline{\mathbf{a}}_2 \cdot x_2 + \ldots + \underline{\mathbf{a}}_n \cdot x_n = \underline{\mathbf{b}}$$

$$\begin{array}{lllll}
\mathbf{0} \cdot x_1 + & \mathbf{0} \cdot x_2 + & \ldots & \mathbf{0} \cdot x_n = & \mathbf{?}_t \\
\mathbf{1} \cdot x_1 + & \alpha_{2,2} \cdot x_2 + & \ldots & \alpha_{2,n} \cdot x_n = & \beta_2 \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
\alpha_{m,1} \cdot x_1 + & \alpha_{m,2} \cdot x_2 + & \ldots & 1 \cdot x_n = & \beta_m
\end{array}$$

$$\underline{\mathbf{a}}_1 \cdot x_1 + \underline{\mathbf{a}}_2 \cdot x_2 + \ldots + \underline{\mathbf{a}}_n \cdot x_n = \underline{\mathbf{b}}$$

$$\begin{array}{lllll}
\mathbf{0} \cdot x_1 + & \mathbf{0} \cdot x_2 + & \ldots & \mathbf{0} \cdot x_n = & ?_t \quad ?_t = 0 \\
\mathbf{1} \cdot x_1 + & \alpha_{2,2} \cdot x_2 + & \ldots & \alpha_{2,n} \cdot x_n = & \beta_2 \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
\alpha_{m,1} \cdot x_1 + & \alpha_{m,2} \cdot x_2 + & \ldots & 1 \cdot x_n = & \beta_m
\end{array}$$

Példa:

pl	$\underline{\mathbf{a}}_1$	$\underline{\mathbf{a}}_2$	$\underline{\mathbf{a}}_3$	$\underline{\mathbf{a}}_4$	$\underline{\mathbf{a}}_5$	$\underline{\mathbf{a}}_6$	$\underline{\mathbf{a}}_7$	$\underline{\mathbf{a}}_8$	=	$\underline{\mathbf{b}}$
$\underline{\mathbf{a}}_2$		1	−7	5		−6			=	10
$\underline{\mathbf{e}}_2$								0	=	0
$\underline{\mathbf{a}}_1$	1		5			4	−4		=	12
$\underline{\mathbf{a}}_5$			−7	5	1	−6	3		=	19
$\underline{\mathbf{e}}_5$								0	=	0
$\underline{\mathbf{a}}_8$			6	7		−9	−5	1	=	13

"józan" ésszel:

pl	$\underline{a}_1$	$\underline{a}_2$	$\underline{a}_3$	$\underline{a}_4$	$\underline{a}_5$	$\underline{a}_6$	$\underline{a}_7$	$\underline{a}_8$	=	$\underline{b}$
$\underline{a}_2$		$1x_2$	$-7x_3$	$+5x_4$		$-6x_6$			=	10
$\underline{e}_2$								0	=	0
$\underline{a}_1$	$1x_1$		$+5x_3+$			$+4x_6$	$-4x_7$		=	12
$\underline{a}_5$			$-7x_3$	$+5x_4$	$+1x_5$	$-6x_6$	$+3x_7$		=	19
$\underline{e}_5$								0	=	0
$\underline{a}_8$			$6x_3$	$+7x_4$		$-9x_6$	$-5x_7$	$+1x_8$	=	13

pl	$\underline{\mathbf{a}}_1$	$\underline{\mathbf{a}}_2$	$\underline{\mathbf{a}}_3$	$\underline{\mathbf{a}}_4$	$\underline{\mathbf{a}}_5$	$\underline{\mathbf{a}}_6$	$\underline{\mathbf{a}}_7$	$\underline{\mathbf{a}}_8$	=	$\underline{\mathbf{b}}$
$\underline{\mathbf{a}}_2$		$1\mathbf{x}_2$	$-7\mathbf{x}_3$	$+5\mathbf{x}_4$		$-6\mathbf{x}_6$			=	10
$\underline{\mathbf{e}}_2$								0	=	0
$\underline{\mathbf{a}}_1$	$1\mathbf{x}_1$		$+5\mathbf{x}_3+$			$+4\mathbf{x}_6$	$-4\mathbf{x}_7$		=	12
$\underline{\mathbf{a}}_5$			$-7\mathbf{x}_3$	$+5\mathbf{x}_4$	$+1\mathbf{x}_5$	$-6\mathbf{x}_6$	$+3\mathbf{x}_7$		=	19
$\underline{\mathbf{e}}_5$								0	=	0
$\underline{\mathbf{a}}_8$			$6\mathbf{x}_3$	$+7\mathbf{x}_4$		$-9\mathbf{x}_6$	$-5\mathbf{x}_7$	$+1\mathbf{x}_8$	=	13

$\underline{\mathbf{x}}_B=[x_2, x_1, x_5, x_8]$, $\underline{\mathbf{x}}_R=[x_3, x_4, x_6, x_7]$,

$r = 4$, $s = 4$.

© A bázisba bevitt ismeretleneket kifejezzük a be nem vitt ("maradék") változókkal: ©

a2) $\mathbf{x_2} = 10-(-7\mathbf{x_3}+5\mathbf{x_4}-6\mathbf{x_6}+0\mathbf{x_7})$

a1) $\mathbf{x_1} = 12-(+5\mathbf{x_3}+0\mathbf{x_4}+4\mathbf{x_6}-4\mathbf{x_7})$

a5) $\mathbf{x_5} = 19-(-7\mathbf{x_3}+5\mathbf{x_4}-6\mathbf{x_6}+3\mathbf{x_7})$

a8) $\mathbf{x_8} = 13-(+6\mathbf{x_3}+7\mathbf{x_4}-9\mathbf{x_6}-5\mathbf{x_7})$

$\mathbf{x_3}, \mathbf{x_4}, \mathbf{x_6}, \mathbf{x_7} \in \mathbf{R}$

tetszőleges számok

$\underline{\mathbf{x}}_B=[\mathbf{x_2}, \mathbf{x_1}, \mathbf{x_5}, \mathbf{x_8}]$, $\underline{\mathbf{x}}_R=[\mathbf{x_3}, \mathbf{x_4}, \mathbf{x_6}, \mathbf{x_7}]$,

$\mathbf{r = 4}$, $\mathbf{s = 4}$.

$$\underline{x}_B = \underline{d} - D \cdot \underline{x}_R$$

a2) $\mathbf{x}_2 = 10-(-7\mathbf{x}_3+5\mathbf{x}_4-6\mathbf{x}_6+0\mathbf{x}_7)$

a1) $\mathbf{x}_1 = 12-(+5\mathbf{x}_3+0\mathbf{x}_4+4\mathbf{x}_6-4\mathbf{x}_7)$

a5) $\mathbf{x}_5 = 19-(-7\mathbf{x}_3+5\mathbf{x}_4-6\mathbf{x}_6+3\mathbf{x}_7)$

a8) $\mathbf{x}_8 = 13-(+6\mathbf{x}_3+7\mathbf{x}_4-9\mathbf{x}_6-5\mathbf{x}_7)$

$\mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4, \mathbf{x}_6, \mathbf{x}_7 \in \mathbf{R}$

tetszőleges számok

$\underline{x}_B = [x_2, x_1, x_5, x_8]$, $\underline{x}_R = [x_3, x_4, x_6, x_7]$,

r = 4 , s = 4 .

A megoldáshalmaz geometriai szerkezete:

$$M=\left\{\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\\x_5\\x_6\\x_7\\x_8\end{bmatrix}\right\}=\left\{\begin{bmatrix}12-(+5x_3+0\cdot x_4+4x_6-4x_7)\\10-(-7x_3+5x_4-6x_6+0\cdot x_7)\\0\quad+1x_3\\0\quad\quad+1x_4\\19-(-7x_3+5x_4-6x_6+3x_7)\\0\quad\quad\quad+1x_6\\0\quad\quad\quad\quad+1x_7\\13-(+6x_3+7x_4-9x_6-5x_7)\end{bmatrix}\;\middle|\;\begin{matrix}x_3,x_4,x_6,x_7\in R\\ \textit{tetsz. számok}\end{matrix}\right\}=$$

$$=\begin{bmatrix}12\\10\\0\\0\\19\\0\\0\\13\end{bmatrix}+\left\{\begin{bmatrix}-5\\7\\1\\0\\7\\0\\0\\-6\end{bmatrix}\cdot x_3+\begin{bmatrix}0\\-5\\0\\1\\-5\\0\\0\\-7\end{bmatrix}\cdot x_4+\begin{bmatrix}-4\\6\\0\\0\\6\\1\\0\\9\end{bmatrix}\cdot x_6+\begin{bmatrix}4\\0\\0\\0\\-3\\0\\1\\5\end{bmatrix}\cdot x_7\;\middle|\;\begin{matrix}x_3,x_4,x_6,x_7\in R\\ \textit{tetsz. számok}\end{matrix}\right\}=$$

$$= \begin{bmatrix} 12 \\ 10 \\ 0 \\ 0 \\ 19 \\ 0 \\ 0 \\ 13 \end{bmatrix} + L\left\{ \begin{bmatrix} -5 \\ 7 \\ 1 \\ 0 \\ 7 \\ 0 \\ 0 \\ -6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -5 \\ 0 \\ 1 \\ -5 \\ 0 \\ 0 \\ -7 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -4 \\ 6 \\ 0 \\ 0 \\ 6 \\ 1 \\ 0 \\ 9 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix} \right\} = \boxed{\mathbf{u} + L\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\}}\ .$$

tehát:

TÉTEL: A megoldáshalmaz mindig egy $L\{\underline{v}_1,\ldots,\underline{v}_s\}$ altér *eltoltja* egy $\underline{u}$ vektorral:

$$\boxed{\mathbf{M_{inh} = \underline{u}_{inh} + M_{hom}}}$$

azaz $\boxed{\mathbf{\underline{x}_{inh}^{\text{ált}} = \underline{x}_{inh}^{part} + \underline{x}_{hom}^{\text{ált}}}}$ ■

(ld. még 35.old.)

"tudományosan":

pl	$\underline{a}_1$	$\underline{a}_2$	$\underline{a}_3$	$\underline{a}_4$	$\underline{a}_5$	$\underline{a}_6$	$\underline{a}_7$	$\underline{a}_8$	=	$\underline{b}$
$\underline{a}_2$		$1x_2$	$-7x_3$	$+5x_4$		$-6x_6$			=	10
$\underline{e}_2$								0	=	0
$\underline{a}_1$	$1x_1$		$+5x_3+$			$+4x_6$	$-4x_7$		=	12
$\underline{a}_5$			$-7x_3$	$+5x_4$	$+1x_5$	$-6x_6$	$+3x_7$		=	19
$\underline{e}_5$								0	=	0
$\underline{a}_8$			$6x_3$	$+7x_4$		$-9x_6$	$-5x_7$	$+1x_8$	=	13

$\underline{x}_B=[x_2, x_1, x_5, x_8]$, $\underline{x}_R=[x_3, x_4, x_6, x_7]$,

r = 4 , s = 4 .

pl	$\underline{a}_1$	$\underline{a}_2$	$\underline{a}_3$	$\underline{a}_4$	$\underline{a}_5$	$\underline{a}_6$	$\underline{a}_7$	$\underline{a}_8$		=	$\underline{b}$
$\underline{a}_2$		1	−7	5		−6				=	10
$\underline{e}_2$									0	=	0
$\underline{a}_1$	1		5			4	−4			=	12
$\underline{a}_5$			−7	5	1	−6	3			=	19
$\underline{e}_5$									0	=	0
$\underline{a}_8$			6	7		−9	−5	1		=	13

$\underline{x}_B=[x_2, x_1, x_5, x_8]$, $\underline{x}_R=[x_3, x_4, x_6, x_7]$,

r = 4 , s = 4 .

Sorok és oszlopok rendezésével:

pl	$\underline{\mathbf{a}}_1$	$\underline{\mathbf{a}}_2$	$\underline{\mathbf{a}}_5$	$\underline{\mathbf{a}}_8$	$\underline{\mathbf{a}}_3$	$\underline{\mathbf{a}}_4$	$\underline{\mathbf{a}}_6$	$\underline{\mathbf{a}}_7$	=	$\underline{\mathbf{b}}$
$\underline{\mathbf{a}}_1$	$1x_1$				$+5x_3+$		$+4x_6$	$-4x_7$	=	12
$\underline{\mathbf{a}}_2$		$1x_2$			$-7x_3$	$+5x_4$	$-6x_6$		=	10
$\underline{\mathbf{a}}_5$			$1x_5$		$-7x_3$	$+5x_4$	$-6x_6$	$+3x_7$	=	19
$\underline{\mathbf{a}}_8$				$1x_8$	$+6x_3$	$+7x_4$	$-9x_6$	$-5x_7$	=	13
$\underline{\mathbf{e}}_2$								0	=	0
$\underline{\mathbf{e}}_5$								0	=	0

$\underline{\mathbf{x}}_B=[x_2, x_1, x_5, x_8]$, $\underline{\mathbf{x}}_R=[x_3, x_4, x_6, x_7]$,

$\mathbf{r = 4}$, $\mathbf{s = 4}$.

pl	$\underline{a}_1$	$\underline{a}_2$	$\underline{a}_5$	$\underline{a}_8$	$\underline{a}_3$	$\underline{a}_4$	$\underline{a}_6$	$\underline{a}_7$	=	$\underline{b}$
$\underline{a}_1$	$1x_1$				$+5x_3+$		$+4x_6$	$-4x_7$	=	12
$\underline{a}_2$		$1x_2$			$-7x_3$	$+5x_4$	$-6x_6$		=	10
$\underline{a}_5$			$1x_5$		$-7x_3$	$+5x_4$	$-6x_6$	$+3x_7$	=	19
$\underline{a}_8$				$1x_8$	$+6x_3$	$+7x_4$	$-9x_6$	$-5x_7$	=	13
$\underline{e}_2$								0	=	0
$\underline{e}_5$								0	=	0

$$\underline{x}_B + D\underline{x}_R = \underline{d}$$

$\underline{x}_B = [x_2, x_1, x_5, x_8]$, $\underline{x}_R = [x_3, x_4, x_6, x_7]$,

r = 4 , s = 4 .

$$\underline{x}_B + D\underline{x}_R = \underline{d}$$

$\underline{\mathbf{x}}_B=[x_2, x_1, x_5, x_8]$, $\underline{\mathbf{x}}_R=[x_3, x_4, x_6, x_7]$,

r = 4 , **s = 4 .**

$$\underline{x}_B = \underline{d} - D\underline{x}_R$$

$\underline{\mathbf{x}}_B=[x_2, x_1, x_5, x_8]$, $\underline{\mathbf{x}}_R=[x_3, x_4, x_6, x_7] \in R^s$ *tetszőleges*

r = 4 , **s = 4 .** ■

II. A megoldáshalmazok szerkezete és kapcsolata

$\mathbf{A}\underline{\mathbf{x}} = \underline{\mathbf{b}}$

Def.: Az egyenletrendszer **homogén** ha $\underline{\mathbf{b}}=\underline{\mathbf{0}}$, más esetben **inhomogén.** •

2.TÉTEL: *Ha* $\mathbf{A}\underline{\mathbf{x}}_1 = \underline{\mathbf{b}}$ *és* $\mathbf{A}\underline{\mathbf{x}}_2 = \underline{\mathbf{b}}$ *akkor bármely* $\lambda \in R$ *valós számra*

$$\mathbf{A}(\lambda\underline{\mathbf{x}}_1+(1-\lambda)\underline{\mathbf{x}}_2) = \underline{\mathbf{b}} \qquad \text{("konvex lin. kombináció")},$$

azaz: ha van *két* (különböző) gyök, akkor összekötő egyenesük minden pontja is gyök, vagyis ekkor *végtelen sok* gyök van. •

3.TÉTEL: (i) *Ha* $\mathbf{A}\underline{\mathbf{x}}_1 = \underline{\mathbf{b}}$ *és* $\mathbf{A}\underline{\mathbf{x}}_2 = \underline{\mathbf{b}}$ *akkor* $\mathbf{A}(\underline{\mathbf{x}}_1-\underline{\mathbf{x}}_2)= \underline{\mathbf{0}}$.

(ii) *Ha* $\mathbf{A}\underline{\mathbf{x}} = \underline{\mathbf{b}}$ *és* $\mathbf{A}\underline{\mathbf{y}} = \underline{\mathbf{0}}$ *akkor* $\mathbf{A}(\underline{\mathbf{x}}+\underline{\mathbf{y}})= \underline{\mathbf{b}}$. •

!!! Következmény: $$\boxed{\mathbf{M}_{inh} = \underline{\mathbf{u}}^{inh} + \mathbf{M}_{hom}}$$

azaz $$\boxed{\underline{\mathbf{x}}_{inh}^{ált} = \underline{\mathbf{x}}_{inh}^{part} + \underline{\mathbf{x}}_{hom}^{ált}}$$ •

III. Lineáris leképezések

###

IV. Mátrixok (determinánsok)

2x2

$$\left.\begin{aligned} ax + by &= c \\ dx + ey &= f \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{ce - bf}{ae - bd} \\[2em] y = \dfrac{af - cd}{ae - bd} \end{cases}$$

(ha a nevező nem 0)

2x2

$$\left.\begin{array}{l} ax+by=c \\ dx+ey=f \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x=\dfrac{ce-bf}{ae-bd}=\dfrac{?\begin{vmatrix} c & b \\ f & e \end{vmatrix}}{?\begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix}} \\ \\ y=\dfrac{af-cd}{ae-bd}=\dfrac{?\begin{vmatrix} a & c \\ d & f \end{vmatrix}}{?\begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix}} \end{array}\right.$$

2x2

$$\left.\begin{aligned} ax+by&=c \\ dx+ey&=f \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{aligned} x &= \frac{ce-bf}{ae-bd} = \frac{\det\begin{vmatrix} c & b \\ f & e \end{vmatrix}}{\det\begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix}} \\ y &= \frac{af-cd}{ae-bd} = \frac{\det\begin{vmatrix} a & c \\ d & f \end{vmatrix}}{\det\begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix}} \end{aligned}\right.$$

3 x 3

$$\boxed{\begin{array}{l} ax+by+cz \\ ex+fy+gz \\ ix+jy+kz \end{array}}\left.\begin{array}{l} =d \\ =h \\ =l \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x=\dfrac{dfk+bgl+cjh-clf-gjd-kbh}{afk+bgi+cje-cif-gja-kbe} \\ \\ y=\dfrac{ahk+dgi+cle-cih-gla-kde}{afk+bgi+cje-cif-gja-kbe} \\ \\ z=\dfrac{afl+bhi+dje-dif-hja-lbe}{afk+bgi+cje-cif-gja-kbe} \end{array}\right.$$

(ha a nevező nem 0)

3 x 3

$$\boxed{\begin{aligned} ax+by+cz &= d \\ ex+fy+gz &= h \\ ix+jy+kz &= l \end{aligned}} \Rightarrow \begin{cases} x = \det\begin{vmatrix} d & b & c \\ h & f & g \\ l & j & k \end{vmatrix} \Big/ \det\begin{vmatrix} a & b & c \\ e & f & g \\ i & j & k \end{vmatrix} \\ y = \det\begin{vmatrix} a & d & c \\ e & h & g \\ i & l & k \end{vmatrix} \Big/ \det\begin{vmatrix} a & b & c \\ e & f & g \\ i & j & k \end{vmatrix} \\ z = \det\begin{vmatrix} a & b & d \\ e & f & h \\ i & j & l \end{vmatrix} \Big/ \det\begin{vmatrix} a & b & c \\ e & f & g \\ i & j & k \end{vmatrix} \end{cases}$$

n x n : TÉTEL (*Cramer szabály*) :

Tekintsük az $A\cdot\underline{x} = \underline{b}$ lin. egyenletrendszert, ahol az A együtthatómátrix négyzetes: $A = [\underline{a}_1 \ \underline{a}_2 \ \ldots \ \underline{a}_n]_{n\times n}$.

Legyen

$$D = \det(A),$$

$$D_1 = \det([\underline{b} \ \underline{a}_2 \ \ldots \ \underline{a}_n]),$$

$$D_2 = \det([\underline{a}_1 \ \underline{b} \ \ldots \ \underline{a}_n]),$$

$$\ldots$$

$$D_n = \det([\underline{a}_1 \ \underline{a}_2 \ \ldots \ \underline{b}]).$$

Ekkor:

$$D\cdot x_k = D_k \qquad (k = 1, \ldots, n).$$

Következményei: **általában:**

1a. Ha $D \neq 0$ akkor $x_k = D_k / D$ $(k=1,\ldots,n)$ *egyetlen* megoldás van.

2a. Ha $D=0$ de $D_k \neq 0$ legalább egyik k -ra akkor *nincs* megoldás.

3a. Ha $D=0$ és $D_k=0$ mindegyik k –ra

(+) és van megoldás, akkor *végtelen sok* megoldás van. □

Speciálisan: $A\underline{x}=\underline{0}$ **homogén** esetben: $D_k = 0$ mindegyik k -ra

1h. Ha $D \neq 0$ akkor *csak* az $\underline{x} = \underline{0}$ triviális megoldás van.

2h. - - - /ilyen eset nincs/

3h. Ha $D=0$ akkor *végtelen sok* megoldás van. □

összegezve: van *végtelen* sok <=> van nemtriviális <=> $D=0$. □

Példa 3a (+) -ra :

$$\begin{aligned} x + 2y - 3z &= 1 \\ -2x - 4y + 6z &= -2 \\ 3x + 6y - 9z &= 4 \end{aligned}$$

azaz $D = D_1 = D_2 = D_3 = 0$ de *nincs* megoldás

hiszen az egyenlet $\underline{\mathbf{a}}\cdot x + 2\underline{\mathbf{a}}\cdot y - 3\underline{\mathbf{a}}\cdot z = \underline{\mathbf{b}}$ *és* $\lambda\underline{\mathbf{a}} \neq \underline{\mathbf{b}}$.