Újabb diszkét matematikai feladatok a matematika egyéb területeiről

Szalkai István

0) Egy n -jegyű N szám *prímtényezős felbontását* keressük. Egy tanult módszer: a páratlan számokat próbáljuk ki $\sqrt{N}$ -ig. Hány osztást kell elvégeznünk?
a) Ez mennyi idő lenne n=20, n=30, n=40 és n=50 esetén egy 5 GHz -es gépen futtatva (ha *csak* az osztásokat számítjuk egy-egy lépésnek) ?
b) Mennyire csökkenne a futásidő, ha a $\sqrt{N}$ alatti prímszámokat egy tömbben (táblázat-ban) tárolnánk, és csak e prímszámokat próbálnánk ki ?

1) a) Hány szorzást kell elvégeznünk egy nxn -es mátrix *determinánsának* kiszámításához (a definíció szerint)?
Ez mennyi idő lenne n=15, n=20 és n=25 esetén egy 5 GHz -es gépen futtatva (ha *csak* a szorzásokat számítjuk egy-egy lépésnek) ?
Becsüljük meg a kapott eredmény nagyságrendjét $n \to \infty$ esetén!
b) Ugyanekkora mátrixok *szorzásához*, illetve n -edik *hatványának* kiszámolásához hány szorzást kell elvégeznünk? Ezeket is számoljuk át *mp* –re, 5 GHz –es gépet feltételezve !

2) Legyen $f: \mathrm{R}^p \to \mathrm{R}$ egy tetszőleges p -változós, n -szer deriválható függvény.
a) Hányféle n -edik deriváltja van? (Ne feledjük Schwarz tételét!)
b) Hány tagból áll az *f(x)* függvény N -edrendű Taylor polinomja?
c) Hány n -edik deriváltja van az olyan $g: \mathrm{R}^p \to \mathrm{R}$ függvényeknek, melyekre nem igaz Schwarz tétele (azaz $D_i\, g \neq D_j\, g$ ha $i \neq j$) ?

3) Tekintsünk egy n – változós f logikai függvényt.
a) Hány sorból áll igazságtáblázata? Mennyi idő alatt értékelné ki egy 5 GH**z** –es gép, ha *minden órajel alatt egy-egy sort* tudna kiértékelni ?
b) Ha feltesszük, hogy az f függvény értékeinek kb. 50% -a *igaz*, akkor hány karakterből áll az f függvény Diszjunktív Normál Forma (DNF) alakban?
Mennyi ideig nyomtatná a karaktereket egy 5 GH**z** –es gép, ha *minden órajel alatt egy-egy karaktert* nyomtatna ki?
Hány oldalon illetve hány kötetben (hány méter polcon) férne ki ez a DNF **4 pt** –os betűméretben (152 sor, soronként 225 karakter, "biblia"-papíron 1500 lap = 4 cm) ?
(Indexes vátozókat használjunk: $p_1 \ldots p_n$, vagyis mindegyik változóra két-két karaktert számoljunk. A tagadás műveletét jelöljük felülvonással, vagyis ez nem külön karakter. Lehető legkevesebb zárójelet használjunk: $(\wedge \ldots \wedge) \vee (\wedge \ldots \wedge) \ldots$ alakban.)
c)* *Átlagosan* milyen hosszú egy DNF, ha csak a legfeljebb 50% -ban *igaz* függvényeket tekintjük ?
12345678101234567820123456783012345678401234567850123456786012345678701234567880123456789012345671001234567810123456782012345678301234567840123456785012345678601234567870123456788012345678901234567200123456781012345678201234567

4) o) Hány *egyszerű* gráf van n csúcson ?
a) Két n –elemű halmaz között hány bijekció van ?
b) Ha "favágó" -módon két n –csúcsú egyszerű gráf *izomorfiáját* úgy ellenőriznénk, hogy csúcshalmazaik között az *összes* bijekció éltartóságát ellenőriznénk, akkor ez mennyi időt venne igénybe egy 5 GH**z** –es gépen, ha *minden órajel alatt egy-egy* él-ellenőrzést végezne?

5) o) Egy n –elemű és egy k –elemű halmaz között hány *tetszőleges* függvény van?
a) A "favágó" – módszer alkalmazásával mennyi idő alatt tudnánk eldönteni egy n –csúcsú gráfról, hogy *3 -kromatikus* -e, azaz $k=3$ jó -e (5 GH**z**-es gép, *minden órajelben …*) ?
b) Mi a helyzet a $k=2$ esetben ?

6) Hány tagból áll az $(x_1+x_2+...+x_p)^n$ kifejezés (a polinomiális tétel szerint kifejtve) ? Ez mennyi pl. $n=10$ *és* $p=5$ esetén?

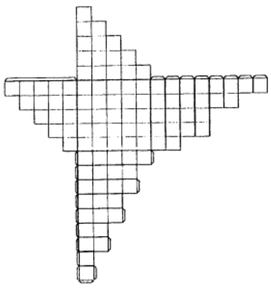
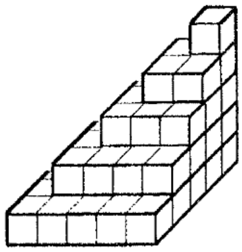
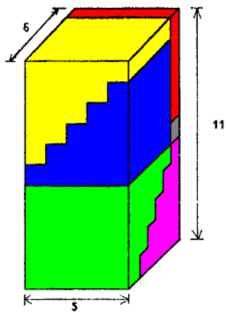
7) Hányféleképpen lehet az $x_1 - x_2 - \ldots - x_n$ kifejezést zárójelezni? Mennyi ideig nyomtatná a végeredeményt egy 5 GH**z**-es gép (*minden órajelben …*) ?

8) Az 1,2,...,100 számok közül hányféleképpen lehet kiválasztani hármat úgy, hogy a kiválasztott számok összege osztható legyen 3 -mal ?
(XVII. Bátaszéki matematikaverseny, országos döntő 7.oszt., 2006.)

9) Tekintsük a természetes számokon a következő (végtelen) gráfot: K=(N,F) ahol (m,n)€F ha m és n relatíve prímek. Mutassuk meg, hogy ekkor tetszőleges G=(V,E) gráf pontosan akkor feszített részgráfja K -nak, ha G tetszőleges P€V csúcspontjára a $G \setminus \Gamma(P)$ gráf kromatikus száma véges (itt $\Gamma(P)$ jelöli P szomszédainak halmazát G -ben).
A feladat általánosítását lásd még [1] -ben.

10) Hány tagból áll a logikai szitaformula n részhamaz esetén?

11) Befejezés helyett: az $1^2+2^2+...+n^2 = n(n+1)(2n+1)/6$ azonosságot szemlélteti az alábbi három ábra:

6x  => 6x  => 

.

Megoldások

0) a) Ha az N szám n -jegyű, akkor értéke körülbelül $N \sim 10^n$ (pontosabban $10^{n-1} \leq N < 10^n$, de nem érdemes ezzel a számításokat bonyolítani). Ekkor az osztások száma $\sqrt{N}/2$.
Ez

n=20 (és 5GHz) esetén $5 \cdot 10^9$ lépés = 1 mp ,

n=30 esetén $5 \cdot 10^{14}$ lépés = 10^5 mp ~ 27 óra 46 perc,

n=40 esetén $5 \cdot 10^{19}$ lépés = 10^{10} mp ~ 317 év 35 nap 18 óra,

n=50 esetén $5 \cdot 10^{24}$ lépés = 10^{15} mp ~ 31.7 millió év ... .

b) Jelöljük tetszőleges x szám esetén $\pi(x)$ -el az x -nél kisebb prímszámok számát!
A "Nagy Prímszámtétel" (Hadamard és de la Vallée Poussin, 1896) szerint $\pi(x) \sim x/\ln(x)$ **.**
Ekkor az osztások száma $\pi(\sqrt{N}) \sim \sqrt{N}/\ln(\sqrt{N})$.
Ez

n=20 (és 5GHz) esetén ~$4.3 \cdot 10^8$ lépés < 1 mp ,

n=30 esetén ~$2.9 \cdot 10^{13}$ lépés ~ 5790 mp ~ 1 óra 36 perc,

n=40 esetén ~$2.2 \cdot 10^{18}$ lépés ~ $4.4 \cdot 10^8$ mp ~ 13 év 281 nap 13 óra,

n=50 esetén ~$1.4 \cdot 10^{23}$ lépés ~ $1.7 \cdot 10^{14}$ mp ~ 5.5 millió év ... .

1) A szorzások száma $n + n(n-1) + n(n-1)(n-2) + \ldots + n!$

vagy másképpen: $n! \cdot (1 + {}^{1}/_{1!} + {}^{1}/_{2!} + \ldots + {}^{1}/_{(n-1)!})$.

A Stirling -formula szerint ez aszimptotikusan:

$$\approx n^n \sqrt{(2\pi n)} / e^n \cdot (1 + {}^{1}/_{1!} + {}^{1}/_{2!} + \ldots + {}^{1}/_{(n-1)!}) \sim (n/e)^n \cdot e \quad .$$

***n*=15** (és 5GHz) esetén ez kb.

$$15^{15}\sqrt{(30\pi)}/e^{14} \sim 3\,534\,937\,201\,323 \text{ lépés}$$

$$= 706\,986 \text{ mp} \approx \mathbf{196} \text{ óra ,}$$

***n*=20** esetén

$$20^{20}\sqrt{(40\pi)}/e^{19} \sim 6\,585\,813\,029\,813\,853\,679 \text{ lépés}$$

$$= 1\,317\,162\,605\,962 \text{ mp} \approx 365\,878\,501 \text{ óra} \approx \mathbf{41\,767 \text{ év !!!}}$$

***n*=25** esetén

$$25^{25}\sqrt{(50\pi)}/e^{24} \sim 3{,}35299 \cdot 10^{24} \text{ lépés}$$

$$\sim 6{,}70598 \cdot 10^{14} \text{ mp} \approx \mathbf{21\,264\,542 \text{ év !!! !!!}}$$

2)a) Egy derivált $D_{k1}D_{k2} \ldots D_{kp} f$ alakú, ahol a $0 \leq k_1, k_2, \ldots, k_p \leq n$ egész számokra teljesül, hogy $k_1 + k_2 + \ldots + k_p = n$. Az ilyen k_i számok száma ismétléses kombináció (ld.pl. [2] 8.6.b) feladatát), azaz

$$C_p^{n\,(ism)} = \binom{p+n-1}{p-1} = \frac{(n+1)(n+2)\ldots(n+p-1)}{(p-1)!} \ .$$

b) A Taylor polinom tagjainak száma

$$\sum_{n=0}^{N}\binom{p+n-1}{p-1} = \binom{p+N}{p} = \frac{(N+1)(N+2)\ldots(N+p)}{p!} > \frac{N^p}{p!} \ .$$

c) Ha Schwarz tétele nem teljesül, akkor a deriváltak lehetséges száma ismétléses variáció:

$$V_p^{n\,(ism)} = p^n \ .$$

3) a) Az igazságtáblázat 2^n sorból áll.

n=10 esetén ez 2^{10} / 5GHz = 1024/5*10^9 mp = 2,048 * 10^{-7} mp,
n=20 esetén ez 2^{20} / 5GHz ≈ 2,097 * 10^{-4} mp,
n=30 esetén ez 2^{30} / 5GHz ≈ 0,215 mp,
n=40 esetén ez 2^{40} / 5GHz ≈ 219,902 mp ≈ 3.6 perc,
n=50 esetén ez 2^{50} / 5GHz ≈ 225 180 mp ≈ 62.5 óra ≈ 2.6 nap,
n=60 esetén ez 2^{60} / 5GHz ≈ 2,306*10^8 mp ≈ 6 405 óra ≈ 7 év 3.5 hónap,
n=70 esetén ez 2^{70} / 5GHz ≈ 2,361*10^{11} mp ≈ 6,559*10^7 óra ≈ **7 508 év !**
n=80 esetén ez 2^{80} / 5GHz ≈ 2,418*10^{14} mp ≈ **7 688 020 év !**
…

b) Minden *igaz* sorhoz egy **($p_1 \wedge \ldots \wedge p_n$)** ∨ jelsorozat tartozik (a tagadás műveletét nem számoljuk), ami *2+2n+n-1+1 = 3n+2* hosszú. Mivel a DNF $2^n/2$ *igaz* sort tartalmaz, ezért a DNF hossza ***2^n *(3n+2)/2*** **.**

n=20 esetén ez 2^{19} *62 / 5GHz ≈ 0,006 mp,
n=30 esetén ez 2^{29} *92 / 5GHz ≈ 9,89 mp,
n=40 esetén ez 2^{39} *122/ 5GHz ≈ 13 414 mp ≈ 3 óra 43,5 perc,
n=50 esetén ez 2^{49} *152/ 5GHz ≈ 1,711*10^7 mp ≈ 6.5 hónap,
n=60 esetén ez 2^{59} *182/ 5GHz ≈ 2,098*10^{10} mp ≈ 667 év 2.5 hónap,
n=70 esetén ez 2^{69} *212/ 5GHz ≈ 2,503*10^{13} mp ≈ **795 830 év !**
n=80 esetén ez 2^{79} *242/ 5GHz ≈ 2,926*10^{16} mp ≈ **930 250 459 év !**

a karakterek száma:

n=20 esetén ez 2^{19} *62 / (152*225) ≈ 15,3 oldal,
n=30 esetén ez 2^{29} *92 / (152*225) ≈ 1 444 214 oldal ≈ 38,5 m -nyi könyv,
n=40 esetén ez 2^{39} *122/ (152*225) ≈ 1,96*10^9 oldal ≈ **52,26 km ! -nyi könyv**,
n=50 esetén ez 2^{49} *152/ (152*225) ≈ 2,5*10^{12} oldal ≈ **16 680 km ! -nyi könyv**,
n=60 esetén ez 2^{59} *182/ (152*225) ≈ 3*10^{15} oldal ≈ **81 805 736 km ! -nyi könyv**,
n=70 esetén ez 2^{69} *212/ (152*225) ≈ 3,66*10^{18} oldal ≈ **97 577 163 194 km**,
n=80 esetén ez 2^{79} *242/ (152*225) ≈ 4,28*10^{18} oldal ≈ 1,14*10^{14} km
≈ **0,012 fényév !!! -nyi könyv.**

6) A 2/a) feladat alapján a kifejezés $C_p^{n\,(ism)} = \binom{n+p}{p-1}$ tagból áll.

7) A lehetőségek száma éppen az *n*-edik Catalan szám ([3], 137.old.) :

$$\frac{1}{n+1}\cdot\binom{2n}{n} \approx 2^{n-1} / \sqrt{(2\pi n)} \ ,$$

a közelítés a *Stirling -formulával* történt.

n= 3 esetén ez = 2 lehetőség,
n= 5 esetén ez = 42 lehetőség,
n= 8 esetén ez = 1430 lehetőség,
n=10 esetén ez = 16 796 lehetőség,
n=20 esetén ez ≈ kb. $6{,}56*10^9$ lehetőség.

8) A felsorolt számokat 3-mal való osztási maradékaik szerint csoportosítjuk: 33 szám maradéka 0, 34 maradéka 1 és 33 maradéka 2. A kiválasztott számok összege akkor osztható 3-mal, ha három azonos maradékú, vagy egy 1-es, egy 2-es és egy 0-ás maradékú számot választottunk ki. Így a lehetőségek száma

$$2\cdot\binom{33}{3}+\binom{34}{3}+\binom{33}{1}\cdot\binom{33}{1}\cdot\binom{34}{1} \quad = \quad 53\,922 \ .$$

Hivatkozások

[1] Szalkai István: *An Open Problem Concerning Spanned Subgraphs of Infinite Graphs*, VE Preprint 1991.
http://www.szt.vein.hu/~szalkai/Cno13-.jpg, http://www.szt.vein.hu/~szalkai/CNo13.pdf

[2] ----- : *Diszkrét matematika feladatgyűjtemény*, Veszprémi Egyetemi Kiadó, 1997.

[3] ----- : *Diszkrét matematika és algoritmuselmélet alapjai,* Veszprémi Egyetemi Kiadó, 2001.

eof