Geometria, 11–12. évfolyam

Dobos Sándor és Hraskó András

2013. május 4.

Tartalomjegyzék

1. FEJEZET
Inverzió

Adott a sík (tér) O pontja és egy zérustól különböző λ szám. *Inverzió*nak nevezzük a sík (tér) azon leképezését, amely az O-tól különböző P ponthoz, az OP irányított egyenes azon P' pontját rendeli, amelyre – előjelesen számolva –

$$OP \cdot OP' = \lambda.$$

Az inverzió az O ponton, az inverzió *centrum*-án nem értelmezett, a sík (tér) centrumtól különböző pontjainak halmazát önmagára képezi le kölcsönösen egyértelmű módon.

Ha $\lambda > 0$, akkor megfelelő pozitív r-rel $\lambda = r^2$. Ebben az esetben az inverziónak vannak fixpontjai, nevezetesen az O középpontú r sugarú i kör (gömb) pontjai. Ilyenkor azt mondjuk, hogy az i körre (gömbre) invertálunk. A negatív paraméterű inverzió némileg kézzelfoghatóbbá válik az 1.46. feladat megoldása révén.

Az inverziót Jacob Steiner svájci származású matematikus vezette be a XIX. század első felében.

A feladatgyűjteményben a körök és egyenesek halmazát helyenként egyben kezeljük és *kögyenes*nek nevezünk egy alakzatot, amely kör és egyenes is lehet.

1.1. Az inverzió szerkesztése

1.1. (M) Adott egy kör a középpontjával, és még egy további pont. Szerkesszük meg az adott pont adott körre vonatkozó inverz képét!

1.2. (MS) Adott egy kör a középpontjával, és még egy további pont. Szerkesszük meg az adott pont adott körre vonatkozó inverz képét csak körzővel!

1.3. (MS) Adott két pont. Szerkesszük meg a
a) felezőpontjukat; **b)** harmadolópontjaikat
csak körzővel!

1.2. Kögyenesek képe

1.4. (M) Mutassuk meg, hogy ha az O centrumú inverziónál az A, B pontok képe A' és B', akkor
a) az AOB, $B'OA'$ háromszögek hasonlóak;
b) az A B, A', B' pontok egy körön vagy egyenesen vannak.

1.5. (M) Adott az O középpontú, r sugarú i kör és az i-t érintő e egyenes.
a) Invertáljuk az e egyenes hat pontját i-re!
b) Fogalmazzunk meg sejtést az e egyenes inverz képére vonatkozólag!
c) Igazoljuk a sejtést!
d) Mi lesz e képe egy olyan körre vonatkozó inverziónál, amely koncentrikus i-vel, de sugara csak harmadakkora, mint i sugara?
e) Mi lesz e képe az O középpontú $\lambda = -r^2$ paraméterű inverziónál ($OP \cdot OP' = \lambda < 0$)?

1.6. (M) Milyen egyszerűbb geometriai transzformációval kapható meg egy alakzat i_1 körre vonatkozó invertáltjából az eredeti alakzat i_1-gyel koncentrikus, de háromszor akkora sugarú i_2 körre vonatkozó invertáltja?

1.7. (MS) Az adott O pont a $\lambda \neq 0$ valós paraméter meghatározta i inverziót vizsgáljuk. Milyen alakzatot kapunk, ha valamely e egyenes minden pontját invertáljuk?

1.8. (S) Adott az O középpontú i kör, rajta az A pont és az OA szakasz k Thalesz köre.
a) Invertáljuk a k kör hat pontját i-re!
b) Fogalmazzunk meg sejtést a k kör inverz képére vonatkozólag!
c) Igazoljuk a sejtést!
d) Mi lesz egy tetszőleges O ponton áthaladó kör képe az i körre vonatkozó inverziónál?

1.9. Adott az O középpontú i kör, valamint a k kör, amely nem megy át O-n.
a) Invertáljuk a k kör hat pontját i-re!
b) Fogalmazzunk meg sejtést a k kör inverz képére vonatkozólag!

1.10. (S) Adott az O középpontú i kör, rajta az A pont, valamint az OA egyenest A-ban érintő k kör.
a) Invertáljuk a k kör hat pontját i-re!
b) Fogalmazzunk meg sejtést a k kör inverz képére vonatkozólag!
c) Igazoljuk a sejtést!
d) Milyen alakzat lesz egy tetszőleges, de O-t nem tartalmazó kör képe az i-re vonatkozó inverziónál?
e) És egy negatív paraméterű ($OP \cdot OP' = \lambda < 0$) inverziónál?

1.11. Mutassuk meg, hogy az inverzió „kögyenestartó”, azaz ha egy alakzat kör vagy egyenes, akkor az inverziónál származó képe is kör vagy egyenes!

1.12. (M) A koordinátarendszerben dolgozunk. Inverziónk centruma az origó, paramétere a $\lambda \neq 0$ szám (tehát $OP \cdot OP' = \lambda$)

a) Határozzuk meg a $P(x;y)$ pont inverziónál származó képének koordinátáit!

b) Határozzuk meg, hogy az inverziónál a $P(x;y)$ pont mely pontnak a képe!

c) Határozzuk meg az

$$A(x^2+y^2)+Bx+Cy+D=0$$

egyenletű alakzat képének egyenletét!

d) Ennek alapján adjunk új bizonyítást arra, hogy az inverzió önmagára képezi a körök és egyenesek halmazát!

1.13. (M) Egy R sugarú kört invertálunk egy r sugarú körre. A két középpont távolsága d. Határozzuk meg a kör képének sugarát és középpontjának távolságát az inverzió centrumától!

1.14. Készítsünk vázlatot az 1. ábrák I körre vonatkozó inverz képéről!

1.15. (M) Mutassuk meg, hogy az O centrumú i inverzió pontosan akkor cseréli ki egymással az A, B pontokat, ha O, A és B egy egyenes három különböző pontja és az i inverziónál A és B nem fixpont, de i önmagára képezi az A-n és B-n is átmenő egyik k kört.

1.16. (M) Adott a síkon három különböző pont: A, A' és B. Határozzuk meg a sík összes olyan B' pontját, amelyhez van olyan inverzió, amely A-t A'-be, B-t pedig B'-be viszi.

1.17. (M) Adott a síkon három különböző pont: A, A' és B. Szerkesszünk olyan kört, amely átmegy B-n és amelyre invertálva A-t A'-t kapjuk.

1.18. (M) **a)** Legyen A és A' egy pont és a képe a K körre vonatkozó inverziónál. Bizonyítsuk be, hogy az inverzió alapkörén ($M \in K$) az $AM/A'M$ arány értéke állandó!

b) Bizonyítsuk be, hogy az A, B pontpár Apollóniusz-körei pontosan azok a körök, amelyekre vonatkozó inverziók A-t és B-t egymásra képezik!

1.19. (M) Adott a K és az L kör. Bizonyítsuk be, hogy az alábbi állítások ekvivalensek (körök merőlegessége)!

A) K és L metszi egymást, és bármelyik metszéspontban a körök érintői merőlegesek egymásra.

B) K középpontjából az L-hez húzott érintő érintési pontja a K körön van.

B') L középpontjából a K-hoz húzott érintő érintési pontja az L körön van.

C) A körök R_K, R_L sugaraira és középpontjaik d távolságára $R_K^2 + R_L^2 - d^2 = 0$.

D) A K, L körök különbözőek és a K-ra vonatkozó inverziónál L fix.

D') A K, L körök különbözőek és az L-re vonatkozó inverziónál K fix.

E) L-nek van két olyan (egymástól különböző) pontja, amelyek a K-ra vonatkozó inverziónál kicserélődnek.

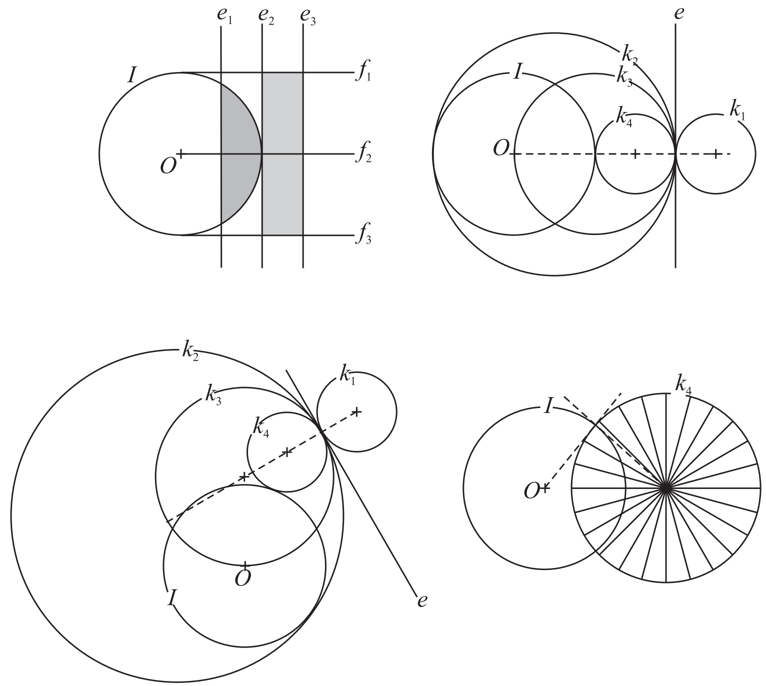
E') K-nak van két olyan (egymástól különböző) pontja, amelyek az L-re vonatkozó inverziónál kicserélődnek.

F) A K, L körök

$$\begin{aligned} a_K(x^2+y^2)+b_Kx+c_Ky+d_K &= 0; \\ a_L(x^2+y^2)+b_Lx+c_Ly+d_L &= 0, \end{aligned}$$

egyenletében

$$2a_Kd_L - b_Kb_L - c_Kc_L + 2d_Ka_L = 0.$$



1.14.1. ábra.

1.20. Adott a síkon három különböző, nem kollineáris pont: A, B, C. Legyen k_A az A-n átmenő B-t a C-be vivő, k_b a B-n átmenő C-t az A-ba vivő, k_c a C-n átmenő A-t a B-be vivő inverzió alapköre. Mutassuk meg, hogy van két pont, amelyeken a három kör mindegyike átmegy.

1.21. Adott a síkon három különböző, nem kollineáris pont: A, B, C. Jellemezzük azokat a centrumokat, amelyekre invertálva az adott pontokat, a kapott A', B', C' pontokra $A'C' = B'C'$ teljesül.

1.3. Szerkesztések csak körzővel

1.22. (MS) **a)** Adott egy kör a középpontjával, és adott még egy egyenes is. Szerkesszük meg az egyenes körre vonatkozó inverz képét csak körzővel! Oldjuk meg a feladatot abban az esetben is, amikor az egyenes csak két pontjával van megadva (és nem megy át az inverzió centrumán).

b) Adott két egyenes két-két pontjával. Szerkesszük meg a metszéspontjukat csak körzővel!

c) Bizonyítsuk be, hogy bármely szerkesztés, ami körzővel és vonalzóval elvégezhető, az elvégezhető csak körzővel is!

1.4. Merőlegesség, fix kör, fixfix kör

1.23. (M) **a)** Igaz-e, hogy bármely két körhöz található egy harmadik kör, mely mind a kettőre merőleges?

b) Igaz-e, hogy bármely két kögyeneshez található olyan kögyenes, amelyik mind a kettőre merőleges! (kögyenes: kör vagy egyenes.)

1.24. (M)

Az 1. a)-d) ábrákon három-három kör látható. Melyik esetben van olyan kör, amelyik mind a háromra merőleges?

e) Adott három kör. Szerkesszünk olyan kört, amelyik mind a háromra merőleges, ha van egyáltalán ilyen!

f) Adott három kör. Van-e mindig olyan inverzió vagy tengelyes tükrözés, amely mind a hármat önmagára képezi?

1.25. (M) Adott két különböző kör. Adjuk meg az összes olyan inverziót, amely

a) kicseréli a két kört egymással;

b) önmagára képezi mindkét kört!

1.26. (M) Adott egy háromszög.

a) Szerkesszük meg annak a körnek a középpontját, amely merőleges a háromszög mindhárom hozzáírt körére!

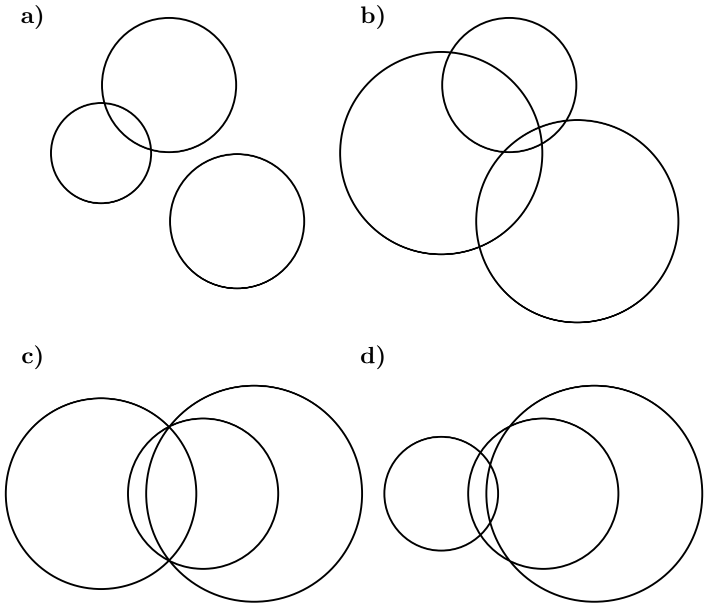
b) Ez máskülönben milyen nevezetes pont?

1.27. (M) Tekintsük azt a három kört, amelyek érintik egy háromszög három hozzáírt körét, méghozzá egyet önmagukon belül, kettőt pedig kívül. Bizonyítsuk be, hogy ennek a három körnek van közös pontja!

1.5. Érintkező körök

1.28. (MS) Az $AB = d$ átmérőjű L félkörbe írt $r = d/4$ sugarú K_1 kör érinti a félkörívet és az AB átmérőt is. Határozzuk meg annak a K_2 körnek a sugarát, amely érinti a félkörívet, az átmérőt és a K_1 kört is, és B-hez közelebb van, mint A-hoz!

1.29. (M) Az ABC derékszögű háromszögben $ACB\angle = 90°$, $AC = \sqrt{20}$, $BC = 5$ A k_A kör középpontja A, sugara 2, a k_B kör középpontja B, sugara 3. Szerkesz-



1.24.1. ábra.

tendők mindazok a C-n átmenő körök, amelyek érintik a k_A, k_B köröket!

1.30. (M) *Apollóniuszi probléma*

a) Adott egy pont és két kör (a körök bármelyike, akár mindkettő lehet egyenes is). Szerkesszünk kört, amely átmegy a ponton és érinti a két adott alakzatot!

b) Adott három kör (a körök bármelyike, akár mindhárom lehet egyenes is). Szerkesszünk kört, amely érinti mindhárom adott alakzatot!

(Lásd még a G.II.10.1-G.II.10.8. feladatokat!)

1.31. (MS) Adott egy kör és rajta az A és a B pont. Tekintsünk az összes lehetséges módon két olyan kört, amelyek egyike A-ban, másika B-ben érinti az adott kört, egymást pedig (egy előre nem adott) M pontban érintik. Határozzuk meg az így adódó M pontok mértani helyét!

1.32. (MS) A K és az L kör egyik metszéspontja A. A két kör e és f közös érintőin az érintési pontok E_K és E_L, illetve F_K és F_L (lásd az 1. ábrát). Bizonyítsuk be, hogy az E_KE_LA és az F_KF_LA háromszög körülírt köre érinti egymást!

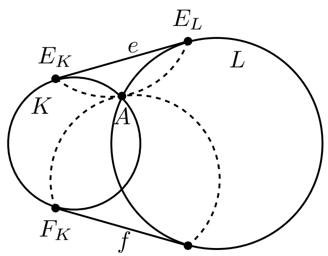
1.33. (M) A k kör érinti az egymással párhuzamos l_1, l_2 egyeneseket. A k_1 kör érinti l_1-et A-ban és kívülről érinti k-t C-ben. A k_2 kör érinti l_2-t B-ben, kívülről érinti k_1-et E-ben és k-t D-ben. Az AD, BC egyenesek metszéspontja Q (lásd az 1. ábrát). Bizonyítsuk be, hogy Q a CDE háromszög köré írt körének középpontja.

1.34. (M) Adott a k kör és annak e átmérő egyenese. Képzeljük el mindazokat a köröket, amelyek érintik e-t és k-t is és az általuk meghatározott egyik félkörlemezen helyezkednek el (lásd az 1. ábrát).

a) Mi a mértani helye ezen körök középpontjainak?

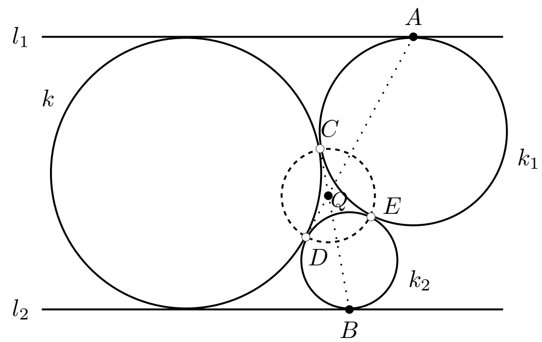
b) Mutassuk meg, hogy a síkon van egy olyan pont, amely illeszkedik bármelyik ilyen körnek az e-vel és k-val való érintési pontját egymással összekötő egyenesre!

c) Ezen körök közül ketten egymást is érinthetik. Hol lehet az érintési pontjuk?

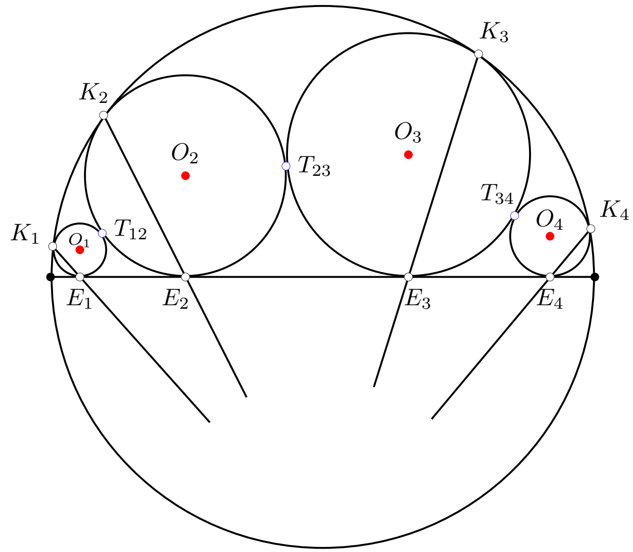


1.32.1. ábra.

1.35. (MS) **a)** Adott két érintkező kör. Egy harmadik kör az egyik adott kört az A pontban, a másik adott kört a B pontban érinti. Bizonyítsuk be, hogy az így adódó



1.33.1. ábra.



1.34.1. ábra.

AB egyenesek mind átmennek egy bizonyos ponton, vagy mind párhuzamosak!

b) Lényeges-e, hogy a két adott kör érinti egymást?

1.36. a) Adott két egymást metsző kör. Tekintsünk az összes lehetséges módon két olyan kört, amelyek mindkét kört érintik és egymást is érintik (egy előre nem adott) M pontban. Határozzuk meg az így adódó M pontok mértani helyét!

b) Lényeges-e, hogy a két adott kör metszi egymást?

1.37. (M) **a)** Adottak az egymást metsző nem azonos sugarú K, L körök a síkon (K és L egyike lehet egyenes is). Tekintsük a K és L által határolt négy síkbeli tartomány egyikében az összes olyan kört, amely érinti K-t és L-t. Mutassuk meg, hogy a síkon van olyan pont, amelynek e körök bármelyikére (nem K-ra és L-re!) vonatkozó hatványa egyenlő!

b) Lényeges-e, hogy a két adott kör metszi egymást?

1.6. Az inverzió szögtartó

1.38. (S) Tekintsünk két egyenest érintkezőnek, ha párhuzamosak. Két kör illetve egy kör és egy egyenes érintkezése ismert fogalom.

Bizonyítsuk be, hogy két kör, két egyenes vagy egy kör és egy egyenes pontosan akkor érintkező, ha az inverziónál származó képeik is azok!

1.39. Mutassuk meg, hogy az egymást két pontban – A-ban és B-ben – metsző k, l körök A-beli érintőinek egymással bezárt szöge abszolút értékben megegyezik a B-beli érintőik szögével, de a két szög irányítás szerint egymással ellentétes.

1.40. (M) **a)** Bizonyítsuk be, hogy két egyenes szöge megegyezik az inverziónál származó képeik szögével!

b) Bizonyítsuk be, hogy az inverzió szögtartó, azaz bármely két kör vagy egyenes szögének abszolút értéke megegyezik képeik szögének abszolút értékével!

c) Mutassuk meg, hogy az inverzió lokálisan szögfordító, azaz bármely pontban az ott találkozó kögyenesek irányított szöge ellentétes a pont képénél a két kögyenes képének irányított szögével!

1.41. Kössük össze az 1. ábrán azokat a részábrákat, amelyek megkaphatók egymásból egy inverzió és egy egybevágóság alkalmazásával! (A pöttyözött vonalak csak segédvonalak)

1.7. Körök speciális elrendezései

1.42. (MS) A k_1, k_2, k_3, k_4 körök ciklikus sorrendben érintik egymást: k_1 és k_2 érintési pontja P_{12}, k_2-é és k_3-é P_{23}, k_3-é és k_4-é P_{34}, végül k_4 és k_1 érintési pontja P_{41}. Bizonyítsuk be, hogy a P_{12}, P_{23}, P_{34}, P_{41} érintési pontok egy körön vannak!

1.43. (M) A k_1, k_2, k_3, k_4 körök ciklikus sorrendben páronként két pontban metszik egymást: $k_1 \cap k_2 = \{P_{12}, Q_{12}\}$, $k_2 \cap k_3 = \{P_{23}, Q_{23}\}$, $k_3 \cap k_4 = \{P_{34}, Q_{34}\}$, $k_4 \cap k_1 = \{P_{41}, Q_{41}\}$. Mutassuk meg, hogy ha a P_{12}, P_{23}, P_{34}, P_{41} metszéspontok egy kögyenesen vannak, akkor a Q_{12}, Q_{23}, Q_{34}, Q_{41} pontok is egy kögyenesre illeszkednek!

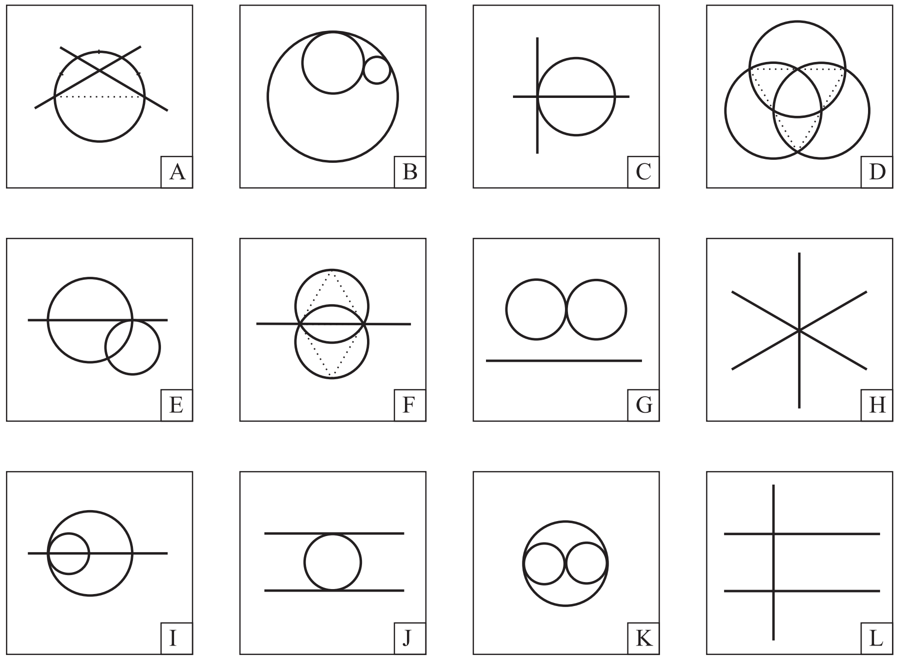
1.44. Bizonyítsuk be, hogy ha egy érintőnégyszög csúcsait invertáljuk a beírt körre, akkor az érintési pontok alkotta sokszög oldalfelezőpontjait kapjuk!

1.45. (M) **a)** Bizonyítsuk be, hogy bármely háromszögben

$$R^2 - d^2 = 2 \cdot R \cdot r,$$

ahol R a körülírt kör, r a beírt kör sugarát, d pedig a középpontok távolságát jelöli!

b) Írjunk fel hasonló összefüggést a háromszög körülírt, az egyik oldalához hozzáírt körének sugara és középpontjaik távolsága között!



1.41.1. ábra.

c)* Hasonló összefüggés állítható fel azoknál a négyszögeknél, amelyek egyszerre húr- és érintő-négyszögek is. Keressük meg az összefüggést és igazoljuk is!

1.46. (MS) Adott az A pont és a K kör. Mutassuk meg, hogy mindazok a körök, amelyek átmennek A-n és K-t egy átmérő két végpontjában metszik tartalmaznak még egy közös pontot!

1.47. (M) (*Az inverzió inverziótartó?*)
Az I, K, K' körök és az A, B, A', B' pontok elrendezése olyan, hogy az I körre vonatkozó inverziónál K képe K', A képe A', míg B képe B', a K-ra vonatkozó inverzió pedig A-t B-nek felelteti meg. Igaz-e, hogy a K'-re vonatkozó inverziónál A' és B' egymás képei?

1.48. (M) Állítsuk elő a tengelyes tükrözést inverziók kompozíciójaként!

1.49. Ha adott a sík tetszőleges A_1 és A_1' pontja, akkor létezik olyan egybevágósági transzformáció, amely A_1-et A_1'-re képezi. Nem nehéz megadni olyan A_1, A_2 és A_1', A_2' pontpárokat, amelyekhez nincs olyan egybevágóság, amely A_1-et A_1'-re, és egyúttal A_2-t A_2' -re képezi.
Bárhogy is adottak a síkon az A_1, A_2, A_1', A_2' pontok, mindig van olyan hasonlósági transzformáció, amely A_1-et A_1'-re, és egyúttal A_2-t A_2'-re képezi. Nem nehéz megadni olyan A_1, A_2, A_3 és A_1', A_2', A_3' ponthármasokat, amelyekhez nincs olyan egybevágóság, amely A_1-et A_1'-re, A_2-t A_2'-re és egyúttal A_3-at A_3' -ra képezi. Határozzuk meg azt a maximális n pozitív egészt, amelyre bárhogyan is adottak a síkon az A_1, A_2, $\ldots$, A_n, A_1', A_2', $\ldots$, A_n' pontok, mindig van inverzióknak olyan kompozíciója, amely A_1-et A_1'-re, A_2-t A_2'-re, $\ldots$, és egyúttal A_n-et A_n'-re képezi!

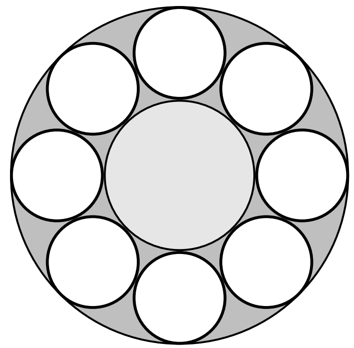
1.50. (MS) Adott két kör. Szerkesszünk két olyan pontot, amelyek mindkét körre vonatkozó inverziónál kicserélődnek!

1.51. Bizonyítsuk be, hogy bármely két közös pont nélküli kör koncentrikus körökbe invertálható!

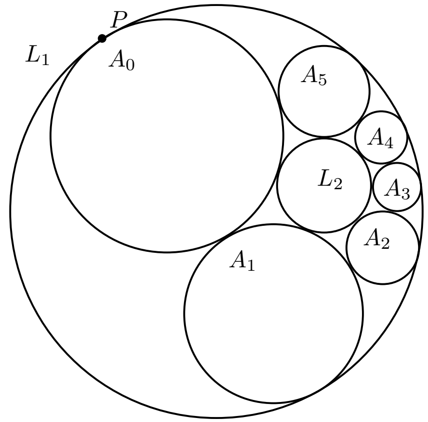
1.52. (M) A k_1, k_2 koncenrikus körök közé 8 egyenlő sugarú kört helyeztünk, amelyek ciklikusan érintik egymást és mindegyik érinti k_1-et és k_2-t (lásd az 1. ábrát).
a) Határozzuk meg a két koncentrikus kör sugarának arányát!
b) A körlánc tagjai egymást olyan pontokban érintik, amelyek mind egy l körön vannak. Fejezzük ki a k_1-gyel és k_2-vel koncentrikus l kör sugarát a k_1, k_2 körök sugaraival!
c) Oldjuk meg az a), b) feladatokat, ha a az eredeti két kör közé n ciklikusan egymást érintő kör lánca írható!

1.53. (M) Szerkesszünk két *nem* koncentrikus kört k_1-et és k_2-t, amelyek egyike a másik belsejében, és 8 további kört, amelyek k_1 és k_2 között vannak, mindkettőt érintik és egymást is ciklikusan: k_1 a k_2-t, k_2 még a k_3-at, k_3 még a k_4-at, $\ldots k_8$ még a k_1-et is.

1.54. (S) Steiner Poriszmája néven ismeretes az alábbi tétel: Adott két kör, L_1 és L_2, amelyek nem érintik egymást. Egy L_1-et is L_2-t is érintő A körből kiindulva



1.52.1. ábra.



1.54.1. ábra.

képezhető köröknek egy sorozata:

– A_0 legyen maga A;

– az A_1 kör érintse L_1-t, is L_2-t is, és A_0-t is;

– általában, A_{k+1} érintse L_1-et, L_2-t és A_k-t.

Állítjuk, hogy ha valamely n-re $A_n = A_0$ – azaz visszaérünk –, akkor bármely A körből kiindulva n lépésben visszaérünk.

1.55. Adott két koncentrikus kör, k_1 és k_2, sugaraik R_1 és R_2. Tekintsünk az összes lehetséges módon két olyan kört, l_1-et és l_2-t, amelyek mindkét előre adott kört érintik, egymást is érintik (egy előre nem adott) M pontban, és a két adott kör közti körgyűrűben helyezkednek el. Láttuk (lásd az 1.36. feladatot), hogy az így adódó M pontok mértani helye egy m kör.

a) Bizonyítsuk be, hogy az m-re vonatkozó inverzió egymásba képezi k_1-et és k_2-t!

b) Határozzuk meg m sugarát!

1.56. Bizonyítsuk be, hogy Steiner Poriszmájában (lásd az 1.54. feladatot) az A_i körök középpontjai egy ellipszisen, az A_i, A_{i+1} körök érintési pontjai egy k körön helyezkednek el, és az A_i, A_{i+1} körök középpontjait összekötő egyenes érinti k-t!

1.57. Adott egy pont és véges sok a pontra illeszkedő különböző sugarú kör. Bizonyítsuk be, hogy pontosan akkor van olyan kör, amely az összes előre adott kört érinti, ha az előre adott körök külső hasonlósági pontjai egy egyenesre illeszkednek!

1.8. Komplex számok és inverziók

1.58. a) Bizonyítsuk be, hogy a z komplex szám képe az origó középpontú egységsugarú körre vonatkozó inverziónál az $1/\overline{z}$ komplex szám!

b) Adjuk meg a ξ középpontú (ξ tetszőleges komplex szám) R sugarú körre vonatkozó inverzió képletét!

1.59. A sík egybevágóságai megőrzik az A és a B pont közötti AB távolságot. A hasonlóságok megőrzik az A, B, C ponthármas $(ABC) = AC/CB$ osztóviszonyát és az $ACB\angle$ nagyságát. Komplex számokkal ez a két mennyiség egyszerre is leírható. Ha a három pontnak megfelelő három komplex szám z_1, z_2 és z_3, akkor irányítástartó hasonlósági transzformációnál megmaradó mennyiség az

$$(z_1, z_2, z_3) = \frac{z_1 - z_3}{z_3 - z_2}$$

komplex osztóviszony. Hogyan kell a sík négy pontjához olyan mértéket rendelni, amely invariáns az inverziókra?

1.60. (M) **a)** Mutassuk meg, hogy három komplex szám osztóviszonya (lásd az 1.59. feladatot) pontosan akkor valós, ha a komplex számsíkon egy egyenesre illeszkednek!

b) A z_1, z_2, z_3, z_4 komplex számok kettősviszonya a

$$(z_1, z_2, z_3, z_4) = \frac{(z_1, z_2, z_3)}{(z_1, z_2, z_4)} = \frac{z_1 - z_3}{z_3 - z_2} : \frac{z_1 - z_4}{z_4 - z_2}$$

komplex szám. Bizonyítsuk be, hogy a kettősviszony a hasonlósági transzformációkra invariáns!

c) Igazoljuk, hogy négy komplex szám kettősviszonya és inverziónál származó képeik kettősviszonya egymás konjugáltja!

d) Mutassuk meg, hogy négy komplex szám kettősviszonya pontosan akkor valós, ha a komplex számsíkon egy egyenesre vagy körre illeszkednek!

1.61. Ha adott a síkon az A_1, A_2 és az A_1', A_2' pontpár úgy, hogy $A_1A_2 = A_1'A_2' \neq = 0$, akkor pontosan két olyan egybevágósági transzformáció van, amely A_1-et A_1'-re, és egyúttal A_2-t A_2'-re képezi. Ezek egyike irányítástartó, a másik megfordítja az irányítást.

Ha adottak a síkon az A_1, A_2, A_3, A_1', A_2', A_3' pontok úgy, hogy

$$(A_1A_2A_3) = (A_1'A_2'A_3') \notin \{0, \infty\} \qquad \text{és} \qquad A_1A_2A_3\angle = A_1'A_2'A_3'\angle,$$

akkor mindig van olyan hasonlósági transzformáció, amely A_1-et A_1'-re, A_2-t A_2'-re és egyúttal A_3-at A_3'-re képezi.

Ha

$$A_1A_2A_3\angle = A_1'A_2'A_3'\angle \notin \{0, \pi\},$$

akkor pontosan egy, ha

$$A_1A_2A_3\angle = A_1'A_2'A_3' \in \{0, \pi\},$$

akkor pontosan két ilyen transzformáció van: a kettő egyike irányítástartó, a másik megfordítja az irányítást. Dolgozzunk ki hasonló elméletet inverziók kompozíciójával kapcsolatban!

1.9. A gömb vetítései és az inverziók

1.62. (*Gömbre vonatkozó inverzió*)

Mi lesz egy

a) sík; **b)** gömb; **c)** kör

képe a tér egy O pontjára vonatkozó λ arányú inverziónál?

1.63. Adott a síkon a k kör és egy P pont. Felveszünk egy G_x gömböt, amely (felületén) tartalmazza a k kört és a P pontból érintőkúpot rajzolunk G_x-hez. A kúp egy k_x körvonalon érinti G_x-et. Jelölje k_x középpontját P_x. Képzeljük el G_x összes lehetséges helyzetét és határozzuk meg P_x mértani helyét a térben!

1.64. (M) (*Gömb vetítése egy pontból önmagára*)
Adott egy g gömb, rajta egy k kör és adott még egy G-re nem illeszkedő P pont is. Vegyünk fel egy C pontot a k körön és képezzük a PC egyenes és a g gömb C-től különböző C' metszéspontját, illetve legyen $C' = C$, ha PC érinti g-t. Határozzuk meg a C' pontok mértani helyét, ha C befutja k-t!

1.65. Bizonyítsuk be, hogy az inverzió a sztereografikus vetítésből az alábbi módon származtatható.
Tekintsük azt a G gömböt, amelynek k a főköre, legyen ennek a gömbnek a két k-tól legtávolabbi pontja V és U. Vetítsük síkunkat először V-n át G-re, majd G-t az U ponton át vissza a síkra. E két leképezés kompozíciója a síkot önmagára képezi és éppen a k-ra vonatkozó inverziót adja.

1.66. Értelmezzük a gömbön az inverziót a **??**. feladat állítása alapján! Azaz az S gömb A és B pontja akkor legyen egymás képe az S gömbre illeszkedő k körre vonatkozólag, ha az AB főkör merőleges k-ra, és X, Y metszéspontjaikkal (XYAB) = -1. Legyen az S gömb két tetszőleges átellenes pontja U és V (lásd az 1. ábrát), felezőmerőleges síkjuk Σ . Jelölje k, A és B képét az S-t Σ-ra képező U centrumú sztereografikus projekciónál k', A' és B'. Bizonyítsuk be, hogy A és B pontosan akkor egymás képei a k-ra vonatkozó gömbi inverziónál, ha A' és B' egymás képei a k'-re vonatkozó inverziónál (tükrözésnél)!

1.10. Versenyfeladatok

1.67. (M) [4] Az ABC háromszög körülírt körének középpontja O. A beírt kör az oldalakat az A_1, B_1, C_1 pontokban érinti, középpontja O_1. $A_1B_1C_1$ háromszög magasságpontja M_1. Igazoljuk, hogy az O, O_1, M_1 pontok egy egyenesen vannak.

1.68. (M) Adott az i kör és az A pont, amely a körön kívül helyezkedik el.
a) Mutassuk meg, hogy végtelen sok olyan B, C pontpár van, amelyre az ABC háromszög beírt köre i.
b) Jelölje egy ilyen ABC háromszög körülírt körét ω és jelölje még c_A azt az ω belsejében elhelyezkedő, azt belülről érintő kört, amely érinti az AB, AC oldalegyeneseket is. Mutassuk meg, hogy a c_A kör mindig ugyanaz, tehát független B és C választásától!

1.69. [4] Legyen ABC szabályostól különböző háromszög, P pedig a síknak a háromszög csúcsaitól különböző pontja. Jelöljék A_P, B_P és C_P rendre az AP, BP és

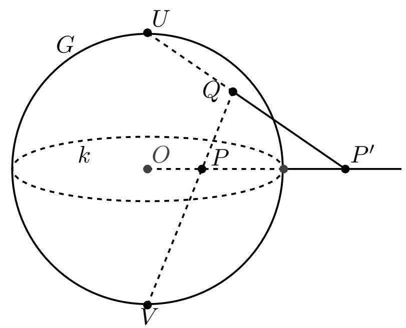
CP egyeneseknek az ABC háromszög köré írt körrel vett második metszéspontjait. Mutassuk meg, hogy a síknak pontosan két olyan P és Q pontja van, hogy az $A_PB_PC_P$ és $A_QB_QC_Q$ háromszögek szabályosak, továbbá, hogy a PQ egyenes áthalad az ABC háromszög köré írt kör középpontján.

1.70. (S) Legyen ABC szabályostól különböző háromszög. Határozzuk meg az összes olyan centrumot, amelyből az A, B, C ponthármas egy szabályos háromszög három csúcsába invertálható.

1.71. Legyen adva a K kör és az A, B pontpár. Az f transzformáció a K kör AB egyenesre nem illeszkedő pontjainak halmazát képezi le önmagára a következőképpen: ha $P \in (K - AB)$ és az AP egyenes és K másik metszéspontja $P*$, akkor a $P * B$ egyenes és K másik metszéspontja $f(P)$. Bizonyítsuk be, hogy ha valamely n pozitív egész számra f^n-nek van fixpontja, akkor f^n identikus!

1.72. Adott egy kör és három pont. Szerkesszünk olyan háromszöget, amelynek körülírt köre az adott kör, oldalegyenesei pedig az adott pontokon mennek át! Általánosítsuk a problémát n pontra és húr-n-szögre!

1.73. (M) [5] Adott a síkon egy c egyenes az egyik oldalán (nem rajta) az A és B pontok, továbbá egy ψ szög. Szerkesztendő olyan $ABCD$ húrnégyszög, amelynek C és D csúcsa c-n vannak, és amelyre a $DAC\angle$ szög egyenlő ψ-vel.



1.66.1. ábra.

1.74. (M) [5] Az AB szakasz felezőpontja C, az AB egyenes egyik oldalán az AC és BC szakaszokra, mint átmérőkre félkört rajzolunk, továbbá A és B körül AB sugárral körívet húzunk, az utóbbiak metszéspontja D. Szerkesszünk érintő kört az $ABCD$ ívnégyszögbe!

1.75. (M) [5] Adott (a síkon) egy e egyenes és az A, B pontok. Szerkesszük meg e-nek azt a P pontját, amelyre a PA/PB arány értéke maximális, illetve amelyre minimális.

1.76. (M) [5] **a)** Adott a síkban három kör. Megválasztható-e az inverzió alapköre úgy, hogy ezek képei is körök legyenek és a körök középpontjai egy egyenesre essenek?

b) Elérhető-e emellet az is, hogy a képek közül kettőnek a sugara egyenlő legyen?

1.77. (M) [5] Egy $A_1A_2A_3$ háromszög nem egyenlő szárú, oldalait jelöljük a_1, a_2, a_3-mal (a_i fekszik A_i-vel szemben). Minden i-re ($i = 1, 2, 3$) M_i az a_i oldal felezőpontja, T_i az a pont, amelyben a beírt kör érinti a_i-t és S_i a T_i pont tükörképe az A_i-hez tartozó belső szögfelezőre nézve. Bizonyítsuk be, hogy az M_1S_1, M_2S_2, M_3S_3 egyenesek egy ponton mennek át.

1.78. (M) [5] Egy szabályos háromszög csúcsai köré egyenlő sugárral k_1, k_2, k_3 kört írunk. Egy P pont inverz képe k_1-re P_1, P_1 inverz képe k_2-re P_2, míg P_2 képe k_3-ra P_3. Szerkesszünk olyan P pontot, amelyre P_3 egybeesik P-vel.

1.79. (M) [5] Adott a P pont, az e, f egyenesek és az ϵ, ψ szögek. Szerkesztendők azok a körök, amelyek átmennek P-n és e-t ϵ, f-et ψ szögben metszik. (Kör és egyenes szögén a kör metszéspontbeli érintőjének az egyenessel bezárt szögét értjük.)

1.80. [3] Milyen felületet kell az egységkörre építeni ahhoz, hogy magasról ránézve épp a kör külsejének inverz képét lássuk rajta?

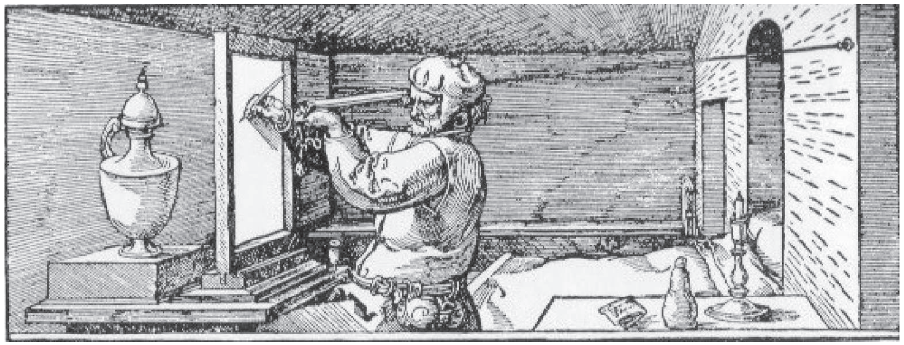
2. FEJEZET
Projektív geometria

2.1. Perspektivitás

2.1. Figyeljük meg Dürer „A művész kannát rajzol” című metszetét (1. ábra)! A rajzoló ábrázolja a kanna alapját alkotó négyzetlapot, párhuzamosok lesznek-e annak oldalai a képén?

2.2. (M) [5] Az 1. ábrán egy focipálya fényképe látható. Szerkesszük meg a
a) pálya középvonalát;
b) az alapvonalakkal párhuzamos, azok távolságát harmadoló egyeneseket!

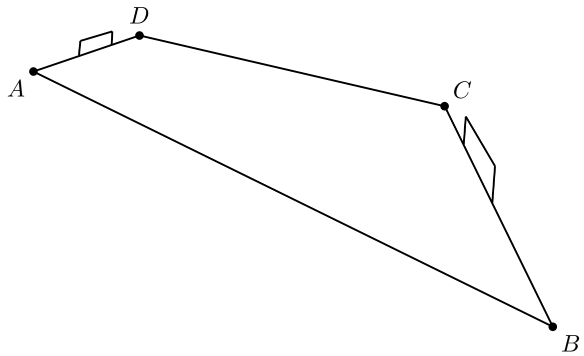
2.3. Nyissuk ki derékszögben a füzetünket (lásd az 1. ábrát) és az egyik oldalon található (vagy az oldal mellé helyezett) négyzethálót vetítsük át a tér egy pontjából a másik lapra (a mindkét lapot képzeljük teljes síknak).
a) Rajzoljuk meg a hálóvonalak képét!
b) Mely pontoknak nem lesz képe a füzetlap síkjában?



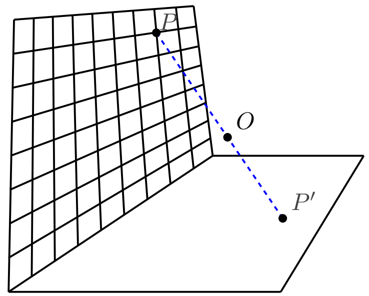
2.1.1. ábra.

c) Párhuzamosak-e az eredetileg párhuzamos rácsvonalak képei?

2.4. (M) (*Ábramagyarázat Leon Battista Alberti (1404–1472) „De pictura” című könyvéhez*)
A festő a terem padlóját jeleníti meg vásznán. A padló negyzetrácsos elrendezésű parketta („pavimenti”). A vászon a padlóig ér, alja, az 1. ábrán az AB szakasz, épp egybeesik az egyik parkettasor kezdetével, a parkettalapok szélei tehát AB-vel párhuzamosak illetve merőlegesek rá. A festő a terem szimmetriatengelyében áll, egynem egy parkettalap oldalaira merőleges szimmetriasíkjában. A festőhöz



2.2.1. ábra.



2.3.1. ábra.

legközelebbi parketta (a festő egyik szeméből vetített) képe a vásznon az $UVWZ$ szimmetrikus trapéz, melynek alapjai $UV = c > a = ZW$, magassága pedig m. A trapéz szárainak meghosszabbításai az O pontban metszik egymást.

Fejezzük ki a, c és m segítségével a

a) festő szemmagasságát;

b) festő és a vászon távolságát!

Az 1. ábrán megrajzoltuk a parkettalapok egymással párhuzamos átlóinak képét is. Ezek egy P pontban metszik egymást.

c) Mutassuk meg, hogy OP és AB párhuzamosak.

d) Bizonyítsuk be, hogy az OP távolság megegyezik a festő és a vászon távolságával.

2.5. Tekintsük a térbeli koordinátarendszerben az O origót, a $z = 1$ egyenletű Σ síkot és az $x = 1$ egyenletű Π síkot. Vetítsük át a Σ síkot O-ból a Π síkra.

a) A Σ sík mely pontjainak nem lesz képe a vetítésnél?

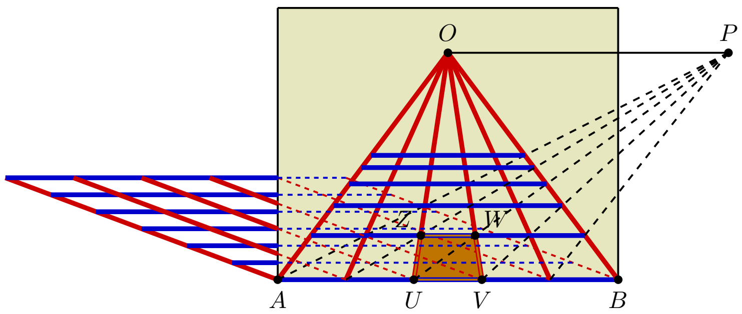
b) A Π sík mely pontjai nem állnak elő a Σ sík egyik pontjának képeként sem?

Tekintsük a Σ sík $P_0(0,0,1)$, $P_1(0,1,1)$, $P_2(0,2,1)$ pontjait és az azokon áthaladó egymással párhuzamos $\underline{e}(1,0,0)$ irányvektorú e_0, e_1, e_2 egyeneseket valamint a P_0, P_1 pontokon átmenő $\underline{f}(1,1,0)$ irányvektorú f_0, f_1 egyeneseket.

c) Határozzuk meg az $e_1 \cap f_0$, $e_2 \cap f_0$, $e_2 \cap f_1$ metszéspontok és vetítésnél származó képeik koordinátáit!

d) Hol metszik egymást az e_0, e_1, e_2 egyenesek képei?

e) Hol metszik egymást az f_0, f_1 egyenesek képei?



2.4.1. ábra.

2.6. Adott egy konvex négyszög, egy négyzetalakú parkettákból álló padló egyetlen négyzetének képe egy festményen vagy fényképen (lásd pl Vermeer „Koncert” című festményének az 1. ábrán látható részletét). Szerkesszük tovább a képet, rajzoljuk meg a szomszédos parkettalapokat!

2.7. (M) Adott egy négyszög.

a) Mutassuk meg, hogy átvetíthető egy másik síkba, hogy képe paralelogramma legyen!

b) Átvihető-e vetítések egymás utáni alkalmazásával négyzetbe?

c) Átvihető-e egyetlen megfelelő vetítéssel négyzetbe?

2.2. A kettősviszony fogalma (pontok és egyenesek)

2.8. Ha A, B, C három pont, amelyek egy egyenesen vannak, akkor hozzájuk rendelhető egy valós szám, a három pont osztóviszonya. Ehhez az egyenesen felveszünk egy irányítást és rajta a PQ távolságot irányítottan értelmezzük: ha P-től Q az egyenes felvett irányításának megfelelő irányban van, akkor PQ előjeles távolságot pozitívnak, egyébként negatívnak tekintjük. Az osztóviszonyt az $(ABC) = AC/CB$ hányados értéke adja meg.

a) Mutassuk meg, hogy az osztóviszony értéke nem változik meg, ha az egyenes irányítását megfordítjuk!

b) Adott az A és a B pont. Az (ABC) osztóviszony értéke mely C pontokra lesz negatív, illetve mikor lesz pozitív?

c) Az $A = B$, $B = C$, $C = A$, $A = B = C$ speciális elrendeződések melyike esetén értelmezhető az osztóviszony és mennyi az értéke?

2.6.1. ábra.

d) Adott az A és a B pont. Keressük meg az összes olyan C pontot, amelyre (ABC) értéke $1, 2, -1, -2$!

e) Melyek azok a valós értékek, amelyet (ABC) nem vesz fel? Van-e olyan érték amelyet, rögzített A, B esetén, több C pontnál is felvesz?

f) Mutassuk meg, hogy (ABC) értéke nem változik meg a sík hasonlósági transzformációinál!

g) Változhat-e (ABC) értéke ha az egyenes a sík egy pontjából egy másik egyenesre vetítjük?

2.9. Ha A, B, C, D négy pont, amelyek egy egyenesen vannak, akkor hozzájuk rendelhető egy szám, a négy pont *kettősviszonya*, az osztóviszonyok hányadosa: $(ABCD) = (ABC)/(ABD) = \frac{AC}{CB} / \frac{AD}{DB} = \frac{AC \cdot DB}{CB \cdot AD}$.

a) Adott az egymástól különböző A, a B és a C pont. Az $(ABCD)$ kettősviszony értéke mely D pontokra lesz negatív, illetve mikor lesz pozitív?

b) Ha az A, B, C, D pontok között azonosak is vannak, akkor mely esetekben hogyan értelmezhető a kettősviszonyuk?

c) Adott az A, a B és a C pont. Szerkesszük meg az összes olyan D pontot, amelyre $(ABCD)$ értéke $1, 2, -1, -2$!

d) Melyek azok a valós értékek, amelyet $(ABCD)$ nem vesz fel? Van-e olyan érték amelyet, rögzített A, B, C esetén, több D pontnál is felvesz?

e) Mutassuk meg, hogy $(ABCD)$ értéke nem változik meg a sík hasonlósági transzformációinál!

2.10. (MS) (*Egyenesek kettősviszonya*)

Jelölje az a és b egyenesek szögét (ab), ezt irányítva értjük. A metszéspontjuk körül a-t (ab) szöggel az óra járásával ellentétes irányba elforgatva éppen b-t kapjuk. Az (ab) szög csak modulo 180° definiált.

Ha a, b, c, d négy egyenes, melyek egy ponton haladnak át, akkor kettősviszonyukat jelölje $(abcd)$. Ez egy szám, melyet így definiálunk:

$$(abcd) = \frac{\sin(ac)}{\sin(cb)} : \frac{\sin(ad)}{\sin(db)}.$$

Mutassuk meg, hogy ha A, B, C és D egy egyenesen elhelyezkedő pontok és O erre az egyenesre nem illeszkedő pont, akkor az $OA = a$, $OB = b$, $OC = c$, $OD = d$ egyenesekre $(abcd) = (ABCD)$!

2.11. (S) (*A kettősviszony invarianciája vetítésnél*)

Mutassuk meg, hogy a vetítés megtartja a kettősviszonyt, azaz ha az egy egyenere illeszkedő A, B, C, D pontok képei az egyenesnek egy másik egyenesre való vetítésénél A', B', C' és D', akkor $(ABCD) = (A'B'C'D')$.

2.12. (M) A számegyenesen az A pont a 0-nál, a B az 1-nél, a C a 3-nál van. Hol van a D pont, ha $(ABCD) = 4$?

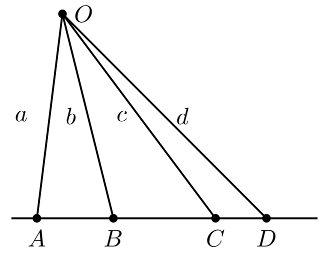
2.13. (M) Az A, B, C, D, pontok a számegyenesen rendre -3, 1, 7, 10-nél vannak, a számegyenes ideális pontját jelölje E. Mekkora a következő kettősviszonyok értéke:

a) $(ABCD)$; **b)** $(DCBA)$; **c)** $(ABCE)$?

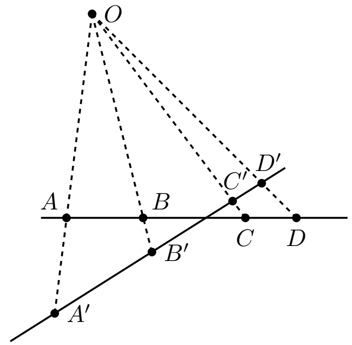
2.14. (*A kettősviszony előjele*) Határozzuk meg fejben az $(ABCD)$ kettősviszony előjelét, ha A, B, C, D rendre a számegyenes alább megadott pontjainak felelnek meg:

a) 1, 4, 5, 10; **b)** (-1), 4, 5, 10; **c)** 1, 4, (-5), 10;

d) 1, 4, 10, 5; **e)** 1, 4, 5, 3; **f)** 1, 4, 2, 3;



2.10.1. ábra.



2.11.1. ábra.

g) 1, 4, 2, (-3); **h)** 1, 4, (-2), (-3).

2.15. Adott egy sugársor három eleme a, b, c. Szerkesszük meg a sugársor d elemét úgy hogy $(abcd)$ értéke
a) 2; **b)** -2
legyen.

2.16. (MS)
a) Mutassuk meg vetítésekkel, hogy $(ABCD) = (BADC)$, azaz vetítések sorozatával vigyük át az A, B, C, D pontnégyest a B, A, D, C pontnégyesbe!
b) Ehhez hasonlóan igazoljuk, hogy $(ABCD) = (DCBA)$.

2.17. Igazoljuk, hogy egy egyenes tetszőleges öt pontjára teljesül, hogy $(ABCD)(ABDE) = (ABCE)$.

2.18. Adott egy egyenesen hét pont: A, B, C, D, A', B', és C'. Szerkesszünk olyan D' pontot, amelyre $(ABCD) = (A'B'C'D')$.

2.19. **a)** Mutassuk meg, hogy ha adott λ valós szám és egy egyenes három pontja, A, B és C, akkor az egyenesen egy és csakis egy olyan D pont van, amelyre $(ABCD) = \lambda$.
b) Igazoljuk, hogy ha fent λ komplex szám és A, B, C a komplex számsík pontjai, akkor is egyértelműen létezik a D pont, melyre $(ABCD) = \lambda$.

2.20. **a)** Mutassuk meg, hogy ha adott egy egyenes három különböző pontja, A, B és C, valamint három további, az előzőekkel esetleg egyező, de egymástól különböző pontja, A', B' és C', akkor van vetítéseknek olyan φ kompozíciója, amely az egyenest önmagára képezi és $\varphi(A) = A'$, $\varphi(B) = B'$, $\varphi(C) = C'$.
b) Igazoljuk, hogy ha a fenti φ transzformáció hatását tekintve egyértelmű, tehát az egyenes bármely D pontjára a $\varphi(D)$ pont egyértelműen meghatározott.

2.21. **a)** Az alábbi $\mathbb{R} \cup \{\infty\} \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ függvények közül melyek tartják meg a valós számnégyesek kettősviszonyát (a függvényeket a végtelenben ottani határértékükkel értelmezzük)?
$f(x) = x + 3$, $g(x) = x^2$, $h(x) = 4x$, $j(x) = \frac{1}{x}$, $f(x) = x^3 - 1$.
b) A fenti függvények $\mathbb{C} \cup \{\infty\} \longrightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ hozzárendeléseknek is felfoghatók. Melyek tartják meg közülük a komplex kettősviszonyt?

2.22. Adjuk meg az összes olyan $\mathbb{R} \cup \{\infty\} \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ függvényt, amely megtartja a valós számnégyesek kettősviszonyát (a függvényeket a végtelenben ottani határértékükkel értelmezzük)!

2.23. (MS) (*A kettősviszony permutációi*)
Legyen $(ABCD) = x$. Tekintsük az A, B, C, D betűk 24 permutációját. Mindegyik π permutációhoz tartozik egy $(\pi(A)\pi(B)\pi(C)\pi(D))$ kettősviszony. Ennek hányféle értéke van? Fejezzük ki a lehetséges értékeket x-szel!

2.24. (MS) (*Kettősviszony vektorokkal*)
Adott az e egyenes, rajta az A, B, C, D pontok, továbbá az e-re nem illeszkedő O pont. Tekintsük az OA, OB, OC, OD egyenesek $\underline{a}$, $\underline{b}$,$\underline{c}$, $\underline{d}$ irányvektorait és legyen

$$\underline{c} = \alpha_1\underline{a} + \beta_1\underline{b}, \qquad \underline{d} = \alpha_2\underline{a} + \beta_2\underline{b}. \tag{1}$$

Fejezzük ki az $(ABCD) = \frac{AC}{CB} / \frac{AD}{DB}$ kettősviszonyt az α_1, β_1, α_2, β_2 változókkal!

2.3. A kettősviszony fogalma (köri pontok, komplex számok)

2.25. (M) (*Komplex osztóviszony és kettősviszony*)
a) A z_1, z_2, z_3 komplex számok kettősviszonya a

$$(z_1, z_2, z_3) = \frac{z_1 - z_3}{z_3 - z_2}$$

komplex szám. Mutassuk meg, hogy három komplex szám osztóviszonya pontosan akkor valós, ha a komplex számsíkon egy egyenesre illeszkednek!
b) Bizonyítsuk be, hogy az osztóviszony irányítástartó hasonlósági transzformációkra invariáns!
c) A z_1, z_2, z_3, z_4 komplex számok kettősviszonya a

$$(z_1, z_2, z_3, z_4) = \frac{(z_1, z_2, z_3)}{(z_1, z_2, z_4)} = \frac{z_1 - z_3}{z_3 - z_2} : \frac{z_1 - z_4}{z_4 - z_2}$$

komplex szám. Igazoljuk, hogy négy komplex szám kettősviszonya és inverziónál származó képeik kettősviszonya egymás konjugáltja!
d) Mutassuk meg, hogy négy komplex szám kettősviszony pontosan akkor valós, ha a komplex számsíkon egy egyenesre vagy körre illeszkednek!
e) Mutassuk meg, hogy négy komplex szám kettősviszony pontosan akkor negatív, ha egy egyenesre vagy körre illeszkednek és azon az AB pontpár elválasztja a CD pontpárt!

2.26. (*Köri pontok kettősviszonya I.*)
Legyen egy kör 6 pontja A, B, C, D, P, Q. Jelölje PA, PB, PC, PD egyenesét a, b, c, d. Jelölje QA, QB, QC, QD egyenesét a',b', c', d'.
a) Igazoljuk, hogy $(abcd) = (a'b'c'd')$.
b) Mutassuk meg, hogy ez az összefüggés akkor is fennáll, ha P megegyezik az A, B, C, D pontok egyikével, ha ilyenkor az egybeeső pontok összekötő egyenesének a kör adott pontbeli érintőjét tekintjük!

2.27. (MS) (*A komplex és a projektív kettősviszony azonossága*)

Adott a k körön az A, B, C, D és a P. Mutassuk meg, hogy a $PA = a$, $PB = b$, $PC = c$, $PD = d$ sugárnégyes $(abcd)$ kettősviszonya egyenlő az A, B, C, D pontnégyes, mint négy komplex szám, kettősviszonyával (lásd az 1.60. feladatot)!

2.28. A k kört érintik az a, b, c, d, p, q egyenesek. Jelölje p egyenesnek az a, b, c, d egyenesekkel való metszéspontjait rendre A, B, C, D. Jelölje q egyenesnek az a, b, c, d egyenesekkel való metszéspontjait rendre A', B', C', D' (lásd az 1. ábrát). Igazoljuk, hogy $(ABCD) = (A'B'C'D')$.

2.29. (*Steiner-tengely*)

Adott a k kör hat pontja: A, B, C és A', B', C'. Az A, B, C pontok különböznek egymástól és A', B', C' is három különböző pont.

a) Mutassuk meg, hogy a k körnek legfeljebb egy olyan önmagára való kettősviszonytartó leképezése van, amelynél A, B és C képei rendre A', B' és C'!

b) Mutassuk meg, hogy van ilyen önmagára való leképezése a körnek!

c) Az 1. ábrán M és N az

$$\beta = AB' \cap A'B, \qquad \gamma = AC' \cap A'C$$

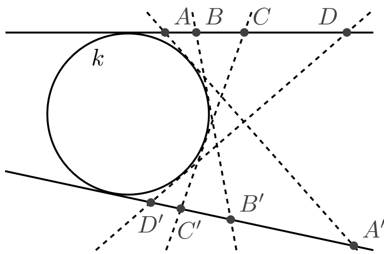
pontokon át húzott $\beta\gamma$ egyenes és a k kör metszéspontjai. Mutassuk meg, hogy M és N az a)-b) feladatrészek szerint egyértelműen létező transzformáció fixpontjai!

2.4. Harmonikus elválasztás

2.30. (*Speciális elrendezések*)

a) Mennyi lehet a számegyenes A, B, C, D pontjainak kettősviszonya, ha a pontok 24 permutációjánál a kettősviszony értékére hatnál kevesebb különböző értéket kapunk?

b) A komplex számsíkon komplex kettősviszonnyal számolva kaphatunk-e az a) részben feltett kérdésre más értéket is?



2.28.1. ábra.

2.31. Adott egy egyenesen négy pont A, B, C, D. Lehetséges-e, hogy $(ABCD) = (ABDC)$? Mekkora lehet $(ABCD)$ értéke? Ilyen helyzetben azt is mondhatjuk, hogy A és B-re vonatkozóan C harmonikus társa D.

2.32. Igazoljuk, hogy ha A és B-re vonatkozóan C és D harmonikus társak, akkor C és D-re vonatkozóan A és B is harmonikus társak.

2.33. Adott egy egyenesen három pont A, B, C. Szerkesszük meg az egyenesen D-t úgy, hogy $(ABCD)$ értéke -1 legyen. Ez a szerkesztés elvégezhető csak vonalzóval is. Hogyan?

2.34. Egy sugársor négy eleme a, b, c, d. $(abcd)$ értéke -1. Hogyan helyezkedik el

a) d, ha c az a és b egyik szögfelezője?

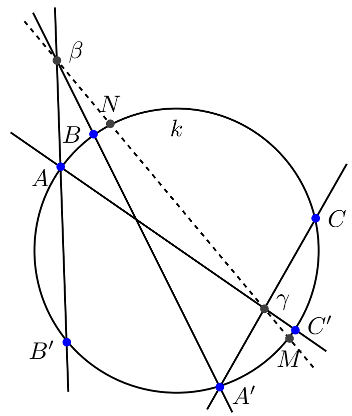
b) c és d, ha a és b merőlegesek?

2.35. Az ABC háromszög AB, BC és CA oldalain vannak rendre a C', A', B' pontok. Az AA', BB', CC' egyenesek egy sugársorhoz tartoznak. Az $A'B'$ egyenes D-ben metszi az AB egyenest. Igazoljuk, hogy $(ABC'D)$ értéke -1.

2.36. Jelölje az $ABCD$ trapéz AC, BD átlóinak metszéspontját U, az AD, BC szárak meghosszabbításának metszépontját V, az AB, CD alapok felezőpontjait F és G. Mutassuk meg, hogy

a) az U, V, F,G pontok egy egyenesen vannak;

b) $(UVFG) = -1$.



2.29.1. ábra.

2.37. A k körhöz a D külső pontból érintőket húzunk. Az érintési pontok S és T. Egy D-n áthaladó szelő A és B pontokban metszi k-t C-ben pedig ST-t. Igazoljuk, hogy $(ABCD)$ értéke -1.

2.38. Tekintsük a k kört és a rá nem illeszkedő O pontot. Az O pontból a kört önmagára vetíthetjük, azaz tekintjük azt a $\varphi : k \longrightarrow k$ leképezést, amelyre $\varphi(P)$ az OP egyenes és a k kör P-től különböző metszéspontja, illetve $\varphi(P) = P$, ha OP érinti k-t (lásd az 1. ábrát).

a) Mutassuk meg, hogy φ kettősviszonytartó leképezés!

b) Mutassuk meg, hogy ha φ a k körnek önmagára való kettősviszonytartó leképezése, amelynek a négyzete az identitás (azaz $P \in k$ esetén $\varphi(\varphi(P)) = P$, tehát φ *involúció*), akkor létezik olyan O pont a síkon, amely bármely $P \in k$ pont esetén illeszkedik a P, $\varphi(P)$ pontok összekötő egyenesére, illetve a k kör P-beli érintőjére, ha $P = \varphi(P)$.

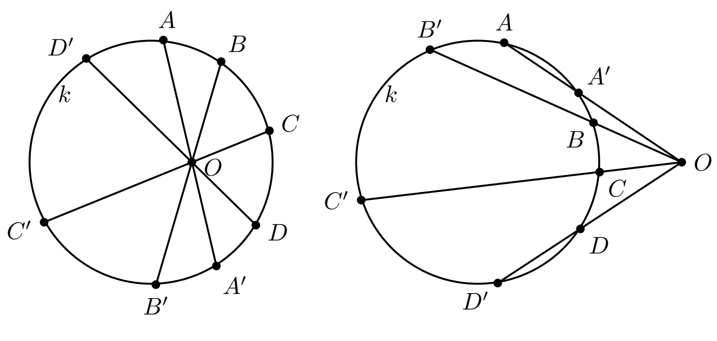
2.5. Kúpszeletek, kör vetítése

2.39. (MS) [7] (*Kúpszeletek a pergéi Apollóniosz „Kónika" című könyvsorozatából*)

Ha adott valamely Σ síkban egy k kör és a Σ síkon kívül a térben egy A pont, akkor az A pontot tartalmazó és k egy-egy pontján átmenő egyenesek uniójaként létrejövő ponthalmazt *körkúp*nak nevezzük. A k kör a kúp *vezérköre* az A pont pedig a kúp *csúcsa*. A körkúp *egyenes körkúp* vagy *forgáskúp*, ha a kúp A csúcsa illeszkedik a k kör forgástengelyére, a Σ síkra merőleges, k középpontján áthaladó egyenesre. Ellenkező esetben a kúp *ferde*.

Mutassuk meg, hogy a körkúp A csúcsát nem tartalmazó síkmetszete kör, ellipszis, hiperbola vagy parabola.

2.40. (M) (*Különböző körmetszetek*)



2.38.1. ábra.

a) Mutassuk meg, hogy a ferde körkúpnak van olyan a vezérkör síkjával nem párhuzamos síkmeteszete, ami kör!

b) Igazoljuk, hogy ha a körkúpnak két nem párhuzamos síkban található síkmetszete kör, akkor ez a két kör egy gömbön van!

2.41. (MS) (*Kör vetítése körbe I., egyenes a végtelenbe*)

Adott egy Σ sík k köre és egy attól diszjunkt t egyenese.

a) Mutassuk meg, hogy van olyan A pont a térben, amelyre az A csúcsú, k vezérkörű kúpnak az A pont és a t egyenes $\Pi_{A,t}$ síkjával párhuzamos síkmetszetei körök.

b) Határozzuk meg az ilyen tulajdonságú A pontok halmazát a térben!

c) Mutassuk meg, hogy a Σ sík átvetíthető egy másik síkba úgy, hogy k képe kör legyen, és t az új sík ideális egyenesébe képződjön!

2.42. (*Kör vetítése körbe II., pont a középpontba*)

Adott egy Σ sík k köre és a k kör egy P belső pontja. Mutassuk meg, hogy a Σ sík átvetíthető egy másik síkba úgy, hogy k képe kör legyen, P képe a k képének középpontja legyen!

2.43. (*Kör középpontja csak vonalzóval nem szerkeszthető*)

Adott a síkban egy körvonal. Igazoljuk, hogy euklideszi szerkesztési módszerekkel, de körző használata nélkül nem szerkeszthető meg a kör középpontja!

2.6. Vetítések és a kettősviszony alkalmazása

2.44. (M) (*A teljes négyoldal tétele*)

Négy egyenesről, amelyek közül semelyik három sem megy át ugyanazon a ponton, azt mondjuk, hogy *teljes négyoldal*t alkot. A négy egyenes metszéspontjai, összesen hat pont, a négyoldal *csúcspontjai*. A csúcspontokat egymással összekötve három új egyenest kapunk, ezek a négyoldal *átlói*. Az átlókon két-két csúcspont található és az eredeti oldalak még két-két pontot, a négyoldal *átlóspontjai*t metszenek ki az átlókból. Mutassuk meg, hogy a teljes négyoldal átlóin a csúcsok az átlóspontokat harmonikusan választják el!

Tehát ha e_1, e_2, e_3, e_4 egyenesek és $e_i \cap e_j = P_{ij}$,

$$P_{12}P_{34} \cap P_{14}P_{23} = U, \qquad \text{és } P_{12}P_{34} \cap P_{13}P_{24} = V \qquad \Rightarrow \qquad (P_{12}P_{34}UV) = (-1).$$

2.45. (*A teljes négyszög tétele*)

Négy pontról, amelyek közül semelyik három sincs egy egyenesen, azt mondjuk, hogy *teljes négyszög*et alkot. Mutassuk meg, hogy ha az E_1, E_2, E_3, E_4 pontok teljes négyszöget alkotnak és $E_iE_j = p_{ij}$,

$$(p_{12} \cap p_{34})(p_{14} \cap p_{23}) = v, \qquad \text{és } (p_{12} \cap p_{34})(p_{13} \cap p_{24}) = v \qquad \Rightarrow \qquad (p_{12}p_{34}uv) = (-1).$$

2.46. (MS) Tekintsük az e egyenest, rajta az A, B pontokat, egy e-től különböző f egyenest és egy O_1 pontot, amely e-re és f-re sem illeszkedik. Vetítsük át e-t f-re O_1-en át, legyen A és B képe A' és B'. Tekintsük az $A'B$, $B'A$ egyenesek O_2 metszésponját és vetítsük vissza f-et e-re O_2-n át (lásd az 1. ábrát). A két vetítés π kompozíciója az e egyenest önmagára képezi. Mutassuk meg, hogy ha P az e tetszőleges pontja, akkor $\pi(\pi(P)) = P$.

2.47. (MS) Vetítések egy ϕ kompozíciója az e egyenest önmagára képezi és az $A \in e$ pontra $\phi(A) \neq A$, de $\phi(\phi(A)) = A$. mutassuk meg, hogy az e egyenes tetszőleges X pontjára $\phi(\phi(X)) = X$.

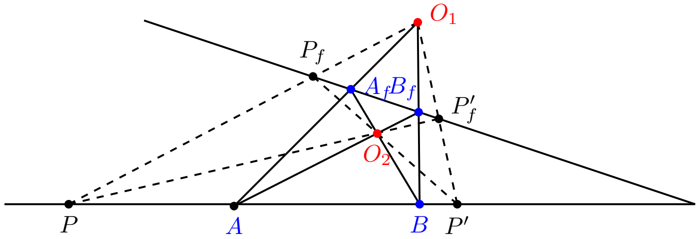
2.48. (MS) [7] (*Desargues II. tétele*)

Adott az a egyenes és rajta öt különböző pont: A_{12}, A_{13}, A_{14}, A_{23}, A_{24} (az egyik, bármelyik, lehet ideális is).

a) Szerkesszünk a síkon négy pontot, P_1-et, P_2-t, P_3-at, P_4-et, úgy hogy a közöttük futó egyenesek a-ból az adott pontokat messék ki: $a \cap P_1P_2 = a_{12}$, $a \cap P_1P_2 = = a_{13}$, $a \cap P_1P_4 = a_{14}$, $a \cap P_2P_3 = a_{23}$, $a \cap P_2P_4 = a_{24}$.

b) Mutassuk meg, hogy a $P_1P_2P_3P_4$ négyszög sokféleképpen felvehető az a) feladatrésznek megfelelően, pl P_1 és P_2 tetszőlegesen előre felvehető, csak arra kell ügyelni, hogy ne essenek egybe, egyik se illeszkedjen a-ra, de a P_1P_2 egyenes átmenjen A_{12}-n.

c) Bizonyítsuk be, hogy az A_{12}, A_{13}, A_{14}, A_{23}, A_{24} pontok meghatározzák az A_{34} pontot, tehát a b), c) feladatrészekben kapott bármelyik $P_1P_2P_3P_4$ négyszögnél az $a \cap P_3P_4$ pont mindig ugyanaz a pont (lásd az 1. ábrát) vagy P_3P_4 mindig párhuzamos a-val.



2.46.1. ábra.

2.49. (M) [7] (*Papposz feladata*)

Adott az a egyenes és rajta három különböző pont: A_{12}, A_{13}, A_{23} valamint két egyenes a_{14} és a_{24}.

a) Mutassuk meg, hogy végtelen sokféleképpen megválaszthatók a sík P_1, P_2, P_3, P_4 pontjai úgy, hogy teljesüljenek az alábbi feltételek:

$$P_1P_4 = a_{14}, \qquad P_2P_4 = a_{24}, \qquad A_{ij} \in P_iP_j \qquad (1 \leq i < j \leq 4). \tag{1}$$

b) Mutassuk meg, hogy a)-ban a lehetséges P_3 pontok egy egyenesen helyezkednek el!

2.50. (MS) (*Desargues I. tétele*)

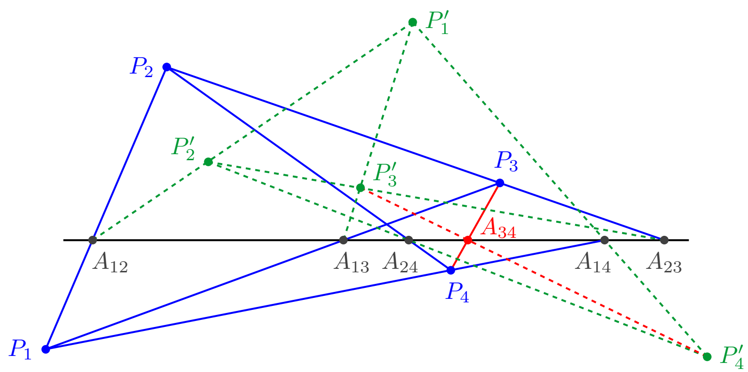
Azt mondjuk, hogy az $A_1B_1C_1$ és az $A_2B_2C_2$ háromszög *pontra nézve perspektív*, ha az A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 egyenesek egy ponton mennek át.

Azt mondjuk, hogy az $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$ háromszögek *egyenesre nézve perspektív*ek, ha az $A_1B_1 \cap A_2B_2$, $B_1C_1 \cap B_2C_2$, $C_1A_1 \cap C_2A_2$ pontok egyenesre illeszkednek (lásd az 1. ábrát).

Mutassuk meg, hogy két háromszög pontosan akkor perspektív pontra nézve, ha perspektív egyenesre nézve!

2.51. (S)

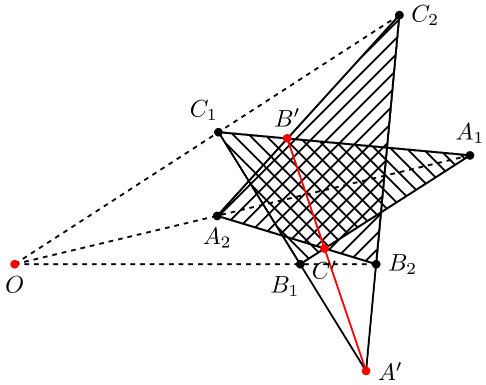
Adott három egyenes, a, b és c, melyek egy közös O ponton mennek át. Adott még három pont is: α, β és γ. Szerkesztendő ABC háromszög, melynek A, B, C csúcsai rendre illeszkednek az a, b, c egyenesekre, míg az α, β, γ pontok rendre illeszkednek a háromszög BC, CA, AB oldalegyeneseire.



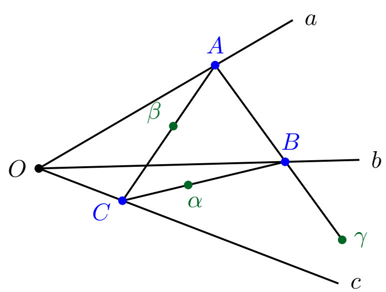
2.48.1. ábra.

2.52. (M) (*MEMO 2008*)
Az ABC egyenlő szárú háromszögben $AC = BC$. A háromszög beírt köre az AB oldalt D-ben, BC-t E-ben érinti. Egy AE-től különböző, de A-n átmenő egyenes a beírt kört az F, G pontokban metszi. Az AB egyenes EF-et és EG-t rendre K-ban és L-ben metszi. Igazoljuk, hogy $DK = DL$.

2.53. (*Pillangó tétel*)
Egy kör AB húrjának felezőpontja F. Az egyik AB íven van két további pont C és D. A CF és DF egyenesek második metszéspontja a körrel rendre E és G. DE és GC húrok az AB húrt rendre X és Y-ban metszik. Igazoljuk, hogy $XF = YF$ (lásd az 1. ábrát).



2.50.1. ábra.



2.51.1. ábra.

2.54. (*Pascal tétel*)
Egy kör hat pontja A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6. Igazoljuk, hogy az

$$A_1A_2 \cap A_4A_5, \qquad A_2A_3 \cap A_5A_6, \qquad A_3A_4 \cap A_6A_1$$

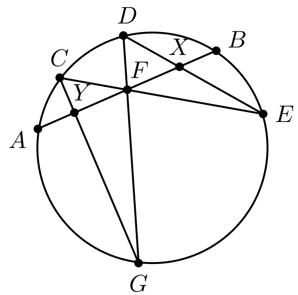
metszéspontok egy egyenesen vannak (lásd az 1. ábrát)!

2.55. (*Pappos-Pascal tétel*)
Adott a síkon két egyenes a és b. Az a egyenes három pontja A_1, A_2, A_3, a b egyenes három pontja B_1, B_2, B_3. Igazoljuk, hogy az

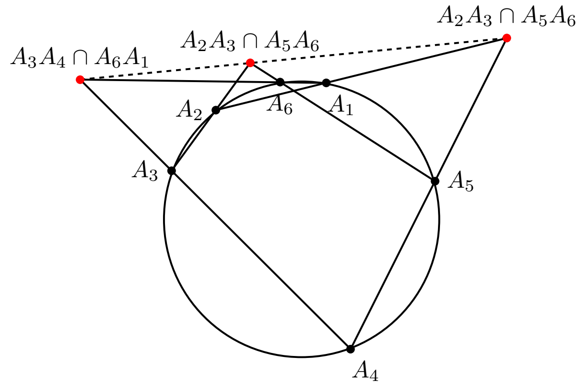
$$C_{12} = A_1B_2 \cap A_2B_1, \qquad C_{23} = A_2B_3 \cap A_3B_2, \qquad C_{31} = A_3B_1 \cap A_1B_3$$

metszéspontok egy egyenesen vannak(lásd az 1. ábrát)!

2.7. Polaritás



2.53.1. ábra.



2.54.1. ábra.

2.56. Adjunk meg a valós projektív sík pontjai és egyenesei közötti olyan bijekciót, amelynél egy pont és egy egyenes pontosan akkor illeszkedik egymásra, ha bijektív megfelelőik illeszkednek egymásra!

2.57. Adott az e és f egyenes valamint a rájuk nem illeszkedő P pont. Jelölje a P-n átmenő p egyenesen a $p \cap e$, $p \cap f$ metszéspontokat E és F, és legyen P harmonikus társa az E, F párra H. Határozzuk meg a H pontok mértani helyét, ha p felveszi összes lehetséges helyzetét!

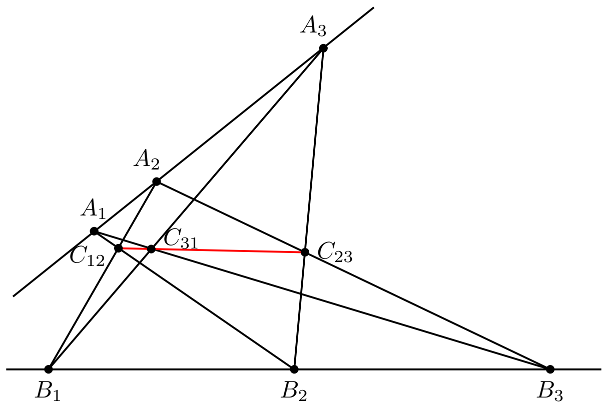
2.58. Adott a p egyenes és a k kör. Legyen P a p egyenes tetszőleges, de k külsejében elhelyezkedő pontja, és jelölje a P-ből a k-hoz húzott érintők érintési pontját U_P és V_P. Vizsgáljuk az U_PV_P egyenesek rendszerét, ha P befutja a p egyenest!

2.59. Adott a k kör és a rá nem illeszkedő P pont. Legyen p tetszőleges egyenes P-n át, amely az U_p, V_p pontokban metszi k-t és legyen k-nak az U_p, V_p pontokban húzott érintőinek metszéspontja H. Határozzuk meg a H pontok mértani helyét, ha p felveszi összes lehetséges helyzetét!

2.60. Adott a k kör (nemelfajuló kúpszelet) és a rá nem illeszkedő P pont. Jelölje a P-n átmenő p egyenes és k metszéspontjait E és F, és legyen P harmonikus társa az E, F párra H. Határozzuk meg a H pontok mértani helyét, ha p felveszi összes lehetséges helyzetét!

2.61. Bergengóciában az $\underline{u}(u_1; u_2; u_3)$, $\underline{v}(v_1; v_2; v_3)$ vektorok szorzatának a

$$< \underline{u}, \underline{v} >_M = u_1v_1 + u_2v_2 - u_3v_3$$



2.55.1. ábra.

valós értékű kifejezést tekintik.

Igaz-e, hogy az $< \underline{u}, \underline{v} >_M$ szorzat

a) kommutatív?

b) asszociatív?

c) a vektorösszeadással disztributív $< \underline{u}, \underline{v} + \underline{w} >_M = < \underline{u}, \underline{v} >_M + < \underline{u}, \underline{w} >_M$?

d) a skalárral való szorzással felcserélhető $< \underline{u}, \lambda\underline{v} >_M = \lambda < \underline{u}, \underline{v} >_M$?

e) Melyek azok a vektorok, amelyek önmagukra merőlegesek, azaz $< \underline{u}, \underline{u} >_M = 0$?

f) Hogy helyezkednek el egy adott vektorra merőleges vektorok, azaz adott $\underline{v}$ esetén hol helyezdkednek el azok az $\underline{u}$ vektorok, melyekre $< \underline{u}, \underline{v} >_M = 0$?

g) Igaz-e a paralelogramma tétel:

$$< \underline{u} + \underline{v}, \underline{u} + \underline{v} >_M + < \underline{u} - \underline{v}, \underline{u} - \underline{v} >_M = 2 < \underline{u}, \underline{u} >_M + 2 < \underline{u}, \underline{u} >_M?$$

2.8. Véges struktúrák

2.62. (S) [1]

A salakmotor-versenyek kedvelői jól tudják, hogy ha egy pályán egyszerre 4 versenyző fér el, és összesen 16 versenyző akarja összemérni az erejét egymással, akkor „szerencsére” éppen be lehet őket osztani négyes futamokba úgy, hogy mindenki mindenkivel egyszer találkozzon.

Próbáljunk meg elkészíteni ilyen futam-beosztást!

2.63. (M) [5] Egy város autóbuszjárataitól a következőket tudjuk:

– Mindegyik járaton 3 megálló van.

– Mindegyik járatról át lehet szállni bármelyik másikra, de csak egy megállónál.

– Bármelyik megállóból eljuthatunk bármelyik másik megállóba, de csak egy járattal.

Hány autóbuszjárat van ebben a városban?

2.64. (M)

a)[1] Válasszunk ki minél többet egy szabályos 13-szög csúcsai közül úgy, hogy a közöttük fellépő távolságok mind különbözőek legyenek (teljesen szabálytalan részsokszög)!

b) Kiválasztható-e a szabályos 13 csúcsai közül három-három, hogy az így adódó két háromszög összesen hat oldala mind különböző hosszúságú legyen?

2.65. (*Véges affin sík*)
A $(H, \mathcal{E})$ párt, ahol H tetszőleges halmaz és $\mathcal{E}$ a H részhalmazainak egy rendszere, *affin sík*nak nevezzük, ha teljesülnek az alábbi axiómák (H elemeit *pont*oknak, a pontok $\mathcal{E}$-ben található részhalmazait *egyenes*eknek nevezzük, két egyenest *párhuzamos*nak nevezünk, ha nincs közös pontjuk):
A1: Bármely két ponthoz pontosan egy olyan egyenes található, amelyben mindkét pont benne van;
A2: Bármely ponton át bármely azt nem tartalmazó egyeneshez pontosan egy vele párhuzamos egyenes húzható;
A3: Van három nem egy egyenesen lévő pont.
Tegyük fel, hogy $(H, \mathcal{E})$ affin sík és van olyan egyenese, amelyen véges sok, n, pont van.
a) Mutassuk meg, hogy minden egyenese n pont van!
b) Hány egyenes megy át egy ponton?
c) Határozzuk meg a pontok és az egyenesek számát!

2.66. (*Véges projektív sík*)
A $(H, \mathcal{E})$ párt, ahol H tetszőleges halmaz és $\mathcal{E}$ a H részhalmazainak egy rendszere, *projektív sík*nak nevezzük, ha teljesülnek az alábbi axiómák (H elemeit *pont*oknak, a pontok $\mathcal{E}$-ben található részhalmazait *egyenes*eknek nevezzük):
P1: Bármely két ponthoz pontosan egy olyan egyenes található, amelyben mindkét pont benne van;
P2: Bármely két egyenesnek pontosan egy közös pontja van.
P3: Bármely egyenesnek legalább három pontja van;
P4: Bármely pontot legalább három egyenes tartalmaz.
Tegyük fel, hogy $(H, \mathcal{E})$ projektív sík és van olyan egyenese, amelyen véges sok pont, $(n + 1)$ pont van.
a) Mutassuk meg, hogy minden egyenesen $(n + 1)$ pont van és minden ponton át $(n + 1)$ egyenes halad.
b) Határozzuk meg a pontok és az egyenesek számát!

2.67. (M) (*Blokkrendszer*)
Egy (v, k, λ)-blokkrendszer egy V alaphalmazból (elemei a pontok) és annak részhalmazainak egy B részhalmazából (elemei a blokkok) álló (V, B) halmazrendszer, ha

VB1. $|V| = v$,
VB2. Minden blokk k elemű,
VB3. minden két különböző pontból álló pár pontosan λ blokkban van egyszerre benne.

a) Fejezzük ki v, k és λ segítségével a blokkok $|B| = b$ számát!
b) Fejezzük ki v, k és λ segítségével egy adott pontot tartalmazó blokkok r számát! (Ez miért független a ponttól?)

c) Mutassuk meg, hogy ha létezik $(n^2 + n + 1, n + 1, 1)$ blokkrendszer $(n \geq 2)$, akkor az projektív sík!
d) Mutassuk meg, hogy ha létezik $(v, k, 1)$ blokkrendszer $(v > k \geq 3)$, akkor $v \geq k^2 - k + 1$ és egyenlőség esetén a blokkrendszer projektív sík!
e) Igaz-e, hogy ha létezik $(n^2, n, 1)$ blokkrendszer $(n \geq 2)$, akkor az affin sík?
f) Próbáljuk meg eldönteni, hogy mely $2 < k < v \leq 31$ esetén van $(v, k, 1)$ blokkrendszer!

2.68. Mutassuk meg, hogy léteznek olyan $(13, 3, 1)$ blokkrendszerek (lásd a 2.67. feladatot), amelyek egymással nem izomorfak (tehát az alaphalmaznak nincs olyan bijektív leképezése önmagára, amely az egyik blokkrendszert a másikba viszi).

2.69. Mutassuk meg, hogy pontosan akkor van $(v, 3, 1)$ blokkrendszer (lásd a 2.67. feladatot), ha $v \equiv 1 \pmod 6$ vagy $v \equiv 3 \pmod 6$.

2.9. Vegyes feladatok

2.70. $ABCD$ konvex négyszög. Az A csúcson át párhuzamost húzunk BD-vel, ez lesz az e egyenes. A B csúcson át párhuzamost húzunk AC-vel, ez lesz az f egyenes. Legyen e és f metszéspontja E. Igazoljuk, hogy EC ugyanolyan arányban osztja BD-t, mint ED AC-t.

2.71. Egy körhöz a külső A pontból érintőket húzunk, az érintési pontok B és C. A B ponton keresztül párhuzamost húzunk AC-vel, ez D-ben metszi a kört. DA a kört E-ben metszi. BE és AC metszéspontja F. Mutassuk meg, hogy F felezi AC-t.

2.72. Az $ABCD$ trapéz párhuzamos oldalai AB és CD, $AC = BC$. AB felezőpontja F. Az F-en át húzott egyenes AD-t P-ben a DB átló B-n túli meghosszabbítását Q-ban metszi. Igazoljuk, $ACP\angle = QCB\angle$.

2.73. Az ABC háromszögben $AB = AC$. A háromszög oldalaira kifele rajzoljuk az azonos körüljárású, egymáshoz hasonló ABC', BCA', CAB' háromszögeket. $AB : BC : CA = AC' : BA' : CB' = BC' : CA' : AB'$. Bizonyítsuk be, hogy AA', BC' és CB' egy ponton mennek át.

2.74. Az ABC háromszög beírt köre a megfelelő oldalakat rendre az A', B', C' pontokban érinti. Az A' pont merőleges vetülete a $B'C'$ egyenesre T. Igazoljuk, hogy $BTA'\angle = A'TC\angle$.

2.75. Az ABC háromszög szögfelezője A'-ben metszi a BC oldalt. Legyen X egy tetszőleges belső pontja az AA' szakasznak. $BX \cap AC = B'$, $CX \cap AB = C'$, $A'B' \cap CC' = P$, $A'C' \cap BB' = Q$. Igazoljuk, hogy $PAC\angle = QAB\angle$

2.76. [8] A *síkbeli konfiguráció* olyan p számú pont és g számú egyenes rendszere, amelyek egy síkban fekszenek oly módon, hogy a rendszer bármely pontja a rendszernek γ számú egyenesére illeszkedik és ugyanígy a rendszer bármely egyenese a rendszer π számú pontján megy át. Az ilyen konfigurációt a $(p_\gamma g_\pi)$ jellel jelöljük.

a) Mutassuk meg, hogy minden konfigurációra érvényes a $p\gamma = g\pi$ összefüggés!

A $(p_\gamma p_\gamma)$ konfigurációt a (p_γ) jellel rövidítjük.Az alábbi konfigurációk közül melyek léteznek?

b) (3_2); **c)** $(6_2 4_3)$; **d)** (7_2); **e)** (7_3); **f)** (8_3); **g)** (9_3).

2.77. Adott a (projektív) térben az egymással páronként kitérő e_1, e_2 és e_3 egyenes.

a) Van-e a tér minden pontján át olyan egyenes, amely mind a három adott egyenest metszi?

b) Mutassuk meg, hogy az e_1, e_2, e_3 egyenesek bármelyikének bármelyik pontján át pontosan egy olyan egyenes van, amely metszi a másik két egyenest!

c) Tekintsük azt a $\varphi : e_2 \longrightarrow e_3$ leképezést, amelynél

$$\varphi(P) = Q \qquad \Longleftrightarrow \qquad PQ \quad \text{metszi} \quad e_1\text{-et}.$$

Igazoljuk, hogy φ kettősviszonytartó bijektív leképezés.

A továbbiakban b) pontban szerkesztett összes egyenes által súrolt $\mathcal{F}$ felületet vizsgáljuk.

d) Legyenek f, g h és j olyan egyenesek, amelyek az e_1, e_2, e_3 egyenesek mindegyikét metszik, a megfelelő metszéspontokat jelölje F_1, F_2, F_3, G_1, G_2, G_3 és H_1, H_2, H_3 illetve J_1, J_2, J_3. Mutassuk meg, hogy

$$(F_1G_1H_1J_1) = (F_2G_2H_2J_2) = (F_3G_3H_3J_3).$$

e) Legyen λ tetszőleges valós szám és jelölje F_λ, G_λ, H_λ az f, g, illetve h egyenesnek azt a pontját, amelyre

$$(F_1F_2F_3F_\lambda) = (G_1G_2G_3G_\lambda) = (H_1H_2H_3H_\lambda) = \lambda.$$

Igazoljuk, hogy a F_λ, G_λ, H_λ egy egyenesre illeszkednek.

f) Mutassuk meg, hogy $\mathcal{F}$ bármely pontján két olyan egyenes halad át, amelynek minden pontja $\mathcal{F}$-hez tartozik és a $\mathcal{F}$-hez tartozó egyenesek két csoportba oszthatók úgy, hogy két egyenes pontosan akkormesse egymást, ha különböző csoportba tartoznak.

3. FEJEZET

A gömb geometriája

Ehhez a fejezethez Bartha Zsolt diák készített megoldásokat.

3.1. (MS) Bizonyítsuk be, hogy bármely gömbháromszögben a szokásos jelölések mellett teljesül a következő összefüggés (gömbi szinusztétel):

$$\sin a : \sin b : \sin c = \sin\alpha : \sin\beta : \sin\gamma.$$

3.2. (MS) Bizonyítsuk be, hogy bármely gömbháromszögben a szokásos jelölések mellett teljesül a következő összefüggés (gömbi koszinusztétel az oldalakra):

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos\alpha.$$

3.3. (MS) a) Bizonyítsuk be, hogy a gömbháromszögekre teljesül a háromszög-egyenlőtlenség.
b) Bizonyítsuk be, hogy egy gömbháromszög kerülete kisebb, mint egy főkör hossza (2π).

3.4. (M) Bizonyítsuk be, hogy egy gömbháromszög poláris gömbháromszögének poláris gömbháromszöge az eredeti gömbháromszög.

3.5. (MS) Mutassuk meg, hogy egy gömbháromszög poláris gömbháromszögének oldalai az eredeti gömbháromszög megfelelő szögeit π-re egészítik ki. Igaz-e, hogy a poláris gömbháromszög szögeit az eredeti gömbháromszög megfelelő oldalaival összeadva szintén π-t kapunk?

3.6. (MS) Bizonyítsuk be, hogy bármely gömbháromszögben a szokásos jelölések mellett teljesül a következő összefüggés (gömbi koszinusztétel a szögekre):

$$\cos\alpha = -\cos\beta\cos\gamma + \sin\beta\sin\gamma\cos a.$$

3.7. (MS) Számítsuk ki Budapest és New York távolságát a Föld felszínén mérve! A két város földrajzi koordinátái:
Budapest: északi szélesség 47,5°, keleti hosszúság 19°,
New York: északi szélesség 41°, nyugati hosszúság 74°.
A Föld sugara: 6378 km. (A Földet tekintsük tökéletes gömbnek.)

3.8. (MS) Egy repülő elindul Oslóból (északi szélesség 60°, keleti hosszúság 11°) nyugati irányban. Végig egyenesen (vagyis a Föld egy főköre mentén) halad, majd az Egyenlítőt elérve leszáll. Melyik városban ér földet?

3.9. (MS) Milyen irányban kell elindulnia egy repülőnek Budapestről (északi szélesség 47,5°, keleti hosszúság 19°) London (északi szélesség 51,5°, hosszúság 0°) felé? Feltételezzük, hogy a repülő végig egyenesen (a Föld egy főköre mentén) halad.

3.10. (MS) Bizonyítsuk be, hogy minden gömbháromszögben a súlyvonalak egy pontban metszik egymást.

3.11. (MS) a) Mekkora az α szögű gömbkétszög területe?
b) Egy gömbháromszög szögei α, β és γ. Mekkora a területe? (Egységsugarú gömbbel dolgozunk, melynek felszíne 4π.)

3.12. (MS) Adottak a gömbön az A és a B (nem átellenes) pontok. Mi azon C pontok mértani helye a gömbfelületen, amelyekre az ABC gömbháromszög területe állandó?

4. FEJEZET

A hiperbolikus sík Poincaré-modellje

Tekintsünk egy K kört. Modellünk pontjai e körlap belső pontjai (ezek nevezzük ezentúl a hiperbolikus sík pontjainak). Modellünk egyenesei (a hiperbolikus egyenesek) a K körre merőleges körök és egyeneseknek a körlapon belüli részei. A hiperbolikus egyenesekre való hiperbolikus tengelyes tükrözések a hiperbolikus egyenesnek megfelelő körre (egyenesre) vonatkozó inverzió (ill. szokásos tengelyes tükrözés).

4.1. (MS) Mutassuk meg, hogy a hiperbolikus tükrözés valóban önmagára képezi a modell ponthalmazát!

4.2. (MS) Mutassuk meg, hogy bármely két hiperbolikus ponton át pontosan egy hiperbolikus egyenes húzható. Adjunk szerkesztési eljárást is! Igazoljuk az állítást arra az esetre is, amikor a két pont bármelyike, akár mind a kettő, K határvonalán van!

4.3. (MS) Mutassuk meg, hogy bármely ponton át, bármely azt nem tartalmazó egyeneshez több (a hiperbolikus síkon) diszjunkt hiperbolikus egyenes is húzható! Mutassuk meg, hogy mindig két „elpattanó” hiperbolikus egyenes van, azaz olyan hiperbolikus egyenes, amely átmegy az adott ponton és csak K határvonalán van közös pontja az adott hiperbolikus egyenessel!

4.4. (MS) Adott két közös pont nélküli hiperbolikus egyenes. Szerkesszünk olyan hiperbolikus egyenest, amelyre való tengelyes tükrözésnél mindkét adott egyenes fix (közös merőleges)!

4.5. (MS) Adott két hiperbolikus egyenes. Szerkesszünk olyan hiperbolikus egyenest, amelyre vonatkozó tükrözés egymásra képezi a két egyenest (*s*zögfelező)!

4.6. (MS) Adott két hiperbolikus pont. Szerkesszünk olyan hiperbolikus egyenest, amelyre vonatkozó hiperbolikus tükrözés felcseréli a két pontot (*f*elezőmerőleges)!

4.7. (MS) Adott egy pont és egy hiperbolikus egyenes. Szerkesszünk az adott ponton át olyan hiperbolikus egyenest, amelyre vonatkozó tükrözésre az adott egyenes fix (*m*agasságvonal)!

4.8. (MS) Szerkesszünk hiperbolikus háromszöget, amelynek szögei $60°$, $45°$, $45°$! Parkettázzuk ki a modell jelentős részét ilyen háromszögekkel! Az ábrát vessük össze M.C. Escher „Angyalok és ördögök II.” (Kreislimit IV.) rajzával!

4.9. (MS) Adott a K kört az A és B pontban metsző L kör, továbbá az A és B pontokon átmenő K-ra merőleges H kör. Mutassuk meg, hogy bármely olyan hiperbolikus tengelyes tükrözés, amely egymásra képezi L két pontját, az önmagára képezi L-et is és H-t is (tehát L pontjainak a H egyenestől való távolsága állandó, azaz L *e*kvidisztáns görbe)!

4.10. (MS) Adott a K kört az A pontban belülről érintő L kör és legyen H tetszőleges olyan hiperbolikus egyenes, amelynek egyik határpontja A. Mutassuk meg, hogy a H-ra vonatkozó hiperbolikus tükrözésnél L fix (tehát L *p*araciklus, azaz egymáshoz elpattanó egyenessereg minden egyes elemén kijelölt egy-egy pont halmaza, amelyek az egyenessereg tagjaira vonatkozó tükrözésekkor egymásba mennek át.)

4.11. (MS) Adott a K kör belsejében egy L kör. Mutassuk meg, hogy L belsejében van egy olyan O pont, amelyen átmenő bármely hiperbolikus egyenesre vonatkozó hiperbolikus tükrözésnél L önmagára képződik! Igazoljuk, hogy L bármely két pontjának hiperbolikus felezőmerőlegese átmegy O-n! Lássuk be, hogy O a K és L körök generálta körsor pontköre! (Azaz L hiperbolikus *k*ör, melynek középpontja O)

4.12. (MS) Adott két hiperbolikus kör (a hiperbolikus középpontjuk nélkül). Szerkesztendő a hiperbolikus centrális.

4.13. (MS) Bizonyítsuk be, hogy bármely hiperbolikus háromszög oldalfelező merőlegesei egy ponton mennek át!

4.14. (MS) Bizonyítsuk be, hogy bármely hiperbolikus háromszög magasságvonalai egy ponton mennek át!

5. FEJEZET
Vegyes feladatok

5.1. [5] Adjunk meg a síkon végtelen sok pontot úgy, hogy közülük bármely kettőnek a távolsága (egy előre megadott egységhez viszonyítva) racionális legyen, és a pontok ne legyenek mind egy egyenesen! Megadhatók-e a pontok úgy hogy ne legyen olyan egyenes, amelyik közülük hármon megy át?

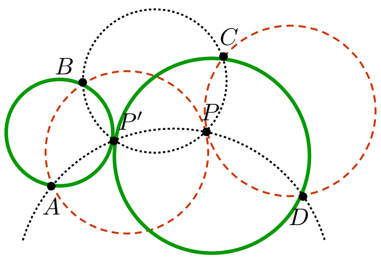
5.2. (MS) Az alábbiakban k_{XYZ}-vel jelöljük az X, Y, Z pontokon átmenő kört.

Legyen adva a síkon négy tetszőleges pont, A, B, C és D. Ha P olyan pont, amelyre a k_{ABP}, k_{CDP} körök érintik egymást és a k_{ADP}, k_{BCP} körök P-n kívül még P'-ben metszik egymást, akkor $k_{ABP'}$ és $k_{CDP'}$ érintik egymást.

5.3. (M) Nemzetközi Diákolimpia 2012/5

Legyen az ABC háromszögben $BCA\angle = 90^o$, és legyen D a C-ből induló magasság talppontja. Legyen X a CD szakasz belső pontja. Legyen K az AX szakasznak az a pontja, amire $BK = BC$. Hasonlóan, legyen L a BX szakasznak az a pontja, amire $AL = AC$. Legyen M az AL és BK egyenesek metszéspontja. Bizonyítsuk be, hogy $MK = ML$.

5.4. (M) [2] *Casey szerint Hart megközelítése Malfatti tételéhez*



5.2.1. ábra.

Adott három irányított kör: k_1, k_2, k_3. Az e_3, f_3 irányított egyenesek k_1-et érintik, k_2-t antiérintik. Az e_2, f_2 egyenesek k_3-at érintik, k_1-et antiérintik, míg e_1 és f_1 érintik k_2-t, míg k_3-at antiérintik. Mutassuk meg, hogy e_1, e_2 és e_3 pontosan akkor mennek át egy közös ponton, ha f_1, f_2 és f_3 átmennek egy közös ponton.

5.5. (M) Tekintsük az $ABCD$ érintőnégyszöget, és annak A csúcsán át az e egyenest, mely a BC oldalt M-ben, a CD oldal meghosszabbítását pedig N-ben metszi. Jelölje az ABM, MCN, NDA háromszögek beírt körének középpontját rendre I_1, I_2 és I_3. Mutassuk meg, hogy az $I_1I_2I_3$ háromszög magasságpontja az e egyenesen van!

Megoldások

1. Inverzió

1.1. Legyen az inverzió alapköre k, középpontja O, az invertálandó pont P.

Három esetre bontjuk a feladatot.

I. eset: P illeszkedik a k körre. Ekkor $P' = P$.

II. eset: P a k kör külső pontja (lásd az 1. ábrát). Legyenek P-ből a k körhöz húzott érintők érintési pontjai B és C. Állítjuk, hogy B-nek és C-nek az OP egyenesre vonatkozó közös merőleges vetülete – tehát a BC szakasz felezőpontja – P'. Valóban, az OBP derékszögű háromszögre vonatkozó befogó-tétel (másképp: az OBP', OPB háromszögek hasonlósága) szerint erre a P' pontra $OP' \cdot OP = OB^2$, ahol OB a k kör sugara, így P' a P inverze.

III. eset: P a kör belső pontja. Az az 1. ábrát most fordítva szerkesztjük meg. A P-ben az OP egyenesre állított merőleges a k körből kimetszi a B, C pontokat, és az azokban k-hoz húzott érintők egymást P invertáltjában metszik. Ennek igazolása a II. esetével analóg.

1.2. Jelölje az inverzió alapkörét i, középpontját O, az invertálandó pontot P.

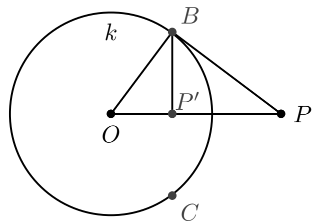
Tegyük fel először, hogy a P középpontú PO sugarú kör metszi az i kört, legyenek a metszéspontok T_1 és T_2. A T_1 iiletve T_2 középpontú T_1O $(= T_2O)$ sugarú körök O-n kívül még egy pontban metszik egymást, legyen ez Q. Könnyen igazolható, hogy Q a P inverz képe i-re, ha figyelembe vesszük, hogy az OT_1P, OQT_1 háromszögek hasonlóak.

Ha a P középpontú PO sugarú kör nem metszi az i kört, akkor az alábbi előkészítő eljárást hajtjuk végre. Az OP szakaszból kiindulva szabályos háromszögrácsot szerkeszthetünk a körző segítségével és így megszerkeszthetjük az OP félegyenes P_2, P_3, … pontjait, melyekre $OP_2 = 2OP$, $OP_3 = 3OP$, … . Valamely n-re a P_n pont P'_n inverze már szerkeszthető lesz. Ezek után az OP'_n szakaszra alapuló szabályos háromszögráccsal megszerkesztjük az OP'_n félegyenes azon Q pon-

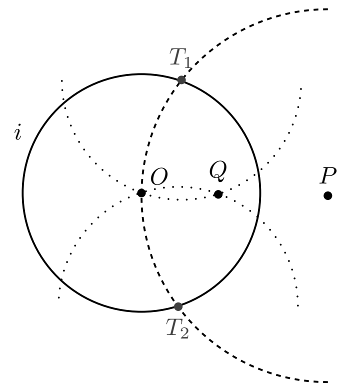
tját, amelyre $OQ = nOP'_n$. Ez a Q pont a P invertáltja, hiszen

$$\frac{r^2}{OP} = n\frac{r^2}{nOP} = n\frac{r^2}{OP_n} = nOP'_n = OQ.$$

1.3. Jelölje az adott pontokat O és P. Két szabályos háromszög szerkesztésével „duplázható”, hárommal triplázható az OP szakasz, azaz megszerkeszthető az a P_2 és az a P_3 pont, amelyre az OP_2 szakasz felezőpontja P, illetve az OP_3 szakasz O felől iharmadolópontja P. A P_2, P_3 pontok képe az O középpontú P ponton



1.1M.1. ábra.



1.2M.1. ábra.

átmenő körre vonatkozó inverziónál az OP szakasz P_2' felezőpontja illetve P_3' harmadolópontja. Ezeket az 1.2. feladat megoldása alapján szerkeszthetjük.

1.4. a) $AOB\angle = A'OB'\angle$ hiszen pozitív paraméterű inverziónál az OA, OA' feélegyenes megegyeznek egymással csakúgy, mint az OB, OB' félegyenesek, míg negatív paraméterű inverziónál OA és OA' illetve OB és OB' is egymással ellentétes (ugyanazon az egyenesen ellenkező irányú) félegyenesek.

Az inverzió definiciója szerint

$$\lambda = OA \cdot OA' = OB \cdot OB', \tag{1}$$

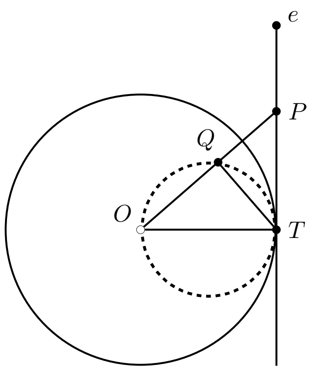
amiből $\frac{OA}{OB} = \frac{OB'}{OA'}$, tehát az egyenlő szög melletti oldalak aránya egyenlő, a két háromszög valóban hasonló.

b) Ha a négy pont nincs egy egyenesen a G.II.11.17. feladat állítása szerint (1)-ből következik, hogy egy körön vannak.

1.5. b) A kép az OT szakasz Thalesz köre – kivéve magát az O pontot –, ahol T az e egyenes és a T kör érintési pontja.

c) A T pont képe önmaga a rajta átmenő k körre vonatkozó inverziónál.

Legyen P az e egyenes tetszőleges T-től különböző pontja és Q az OP félegyenes és OT Thalesz körének O-tól különböző metszéspontja. Az PTO háromszög derékszögű, az OP átfogóhoz tartozó magasság épp QT, hiszen a Thalesz-tétel értelmében $TQO\angle$ derékszög. A Befogó-tétel szerint $OQ \cdot OP = OT^2$, ami épp azt jelenti, hogy P és Q egymás képei az OT sugarú körre vonatkozó inverziónál. Tehát e pontjai a Thalesz körre kerülnek.



1.5M.1. ábra.

Megfordítva, ha Q az OT szakasz Thalesz körének O-tól és T-től különböző pontja, akkor az OQ félegyenes és az e egyenes P metszéspontjára elmondható az előző bekezdés gondolatmenete, P és Q egymás képei az inverziónál. Tehát a Thalesz kör bármelyik O-tól különböző pontja előáll képként.

1.6. Kilencszeres nagyítással.

Tekintsünk általában egy λ_1 és egy λ_2 paraméterű O centrumú inverziót. A P pont két képe – P_1 és P_2 – az OP irányított egyenesen helyezkedik el az $OP \cdot OP_1 = \lambda_1$, $OP \cdot OP_2 = \lambda_2$ relációknak megfelelően. A két összefüggés hányadosa: $\frac{OP_2}{OP_1} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}$, tehát a P_2 pont a P_1 pont képe az O centrumú $\frac{\lambda_2}{\lambda_1}$ arányú nagyításnál.

A konkrét esetben $\frac{\lambda_2}{\lambda_1} = \frac{r_2^2}{r_1^2} = \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2 = 9$.

1.7. Ha e átmegy az inverzió O centrumán, akkor képe lényegében önmaga, csak magának az O pontnak nincs képe a síkon illetve O nem is képe a sík semelyik pontjának sem.

Ha e nem megy át az inverzió centrumán, akkor képe egy O-n átmenő kör. Ha az O-ból e-er állított merőleges talppontja T, és T képe az inverziónál T', akkor e képe az OT' szakasz Thalesz köre az O pont nélkül. Ez az 1.5-1.6. feladatok mintájára igazolható.

1.12. a) A P pont P' képe az OP egyenesen van, tehát valamely α valós számmal $\overrightarrow{OP'} = \alpha\overrightarrow{OP}$. Az inverzió definíciója szerint az $\overrightarrow{OP}$, $\overrightarrow{OP'}$ vektorok előjeles hosszának szorzata λ, azaz $\alpha\overrightarrow{OP}^2 = \lambda$, tehát $\alpha = \frac{\lambda}{x^2+y^2}$, $P'\left(\frac{\lambda x}{x^2+y^2}; \frac{\lambda y}{x^2+y^2}\right)$.

b) Az inverzió inverze ugyanaz az inverzió, tehát a $P(x;y)$ pont a $P'\left(\frac{\lambda x}{x^2+y^2}; \frac{\lambda y}{x^2+y^2}\right)$ pont képe.

c) A $P(x,y)$ pont akkor és csakis akkor van rajta a megadott egyenletű alakzat képén, ha a P pont őse rajta van az eredeti alakzaton, tehát ha a P pont ősének koordinátái kielégíti az alakzat egyenletét:

$$A\left(\left(\frac{\lambda x}{x^2+y^2}\right)^2 + \left(\frac{\lambda y}{x^2+y^2}\right)^2\right) + B\left(\frac{\lambda x}{x^2+y^2}\right) + C\left(\frac{\lambda y}{x^2+y^2}\right)^2 + D = 0.$$

Mivel

$$\left(\frac{\lambda x}{x^2+y^2}\right)^2 + \left(\frac{\lambda y}{x^2+y^2}\right)^2 = \frac{\lambda^2(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{\lambda^2}{x^2+y^2},$$

így (x^2+y^2)-tel való átszorzás után a

$$\lambda^2 D(x^2+y^2) + \lambda Bx + \lambda Cy + A = 0 \tag{1}$$

egyenlethez jutunk.

d) Az

$$A(x^2+y^2) + Bx + Cy + D = 0 \tag{2}$$

A-tól függően kör vagy egyenes egyenlete és D-től függően átmegy az origón, ami az inverzió centruma, vagy nem megy át rajta. Részletesen:

paraméterek	alakzat
$A = 0$, de $B \neq 0$ vagy $C \neq 0$	egyenes
$A \neq 0$	kör (pontkör, képzetes kör)
$D = 0$	átmegy az inverzió centrumán)
$D \neq 0$	nem megy át az inv. centrumán

Az 1., 1. egyenletek összevetéséből látható, hogy az inverziónál
a centrumon átmenő egyenes képe a centrumon átmenő egyenes;
a centrumon átmenő kör képe a centrumon át nem menő egyenes;
a centrumon át nem menő egyenes képe a centrumon átmenő kör;
a centrumon át nem menő kör képe a centrumon át nem menő kör.

1.13. Az inverzió O_i centrumát a vizsgált k kör O_k középpontjával összekötő e egyenesen számolunk. Kissé általánosabban dolgozunk, az i inverzió paramétere legyen λ, a feladatban $\lambda = r^2$.

Legyen $e \cap k = \{A, B\}$. Tekintsük az e egyenest olyan számegyenesnek, amelynek origója O_i és O_k felé van irányítva. Az O_k, A, B pontoknak feleljenek meg rendre a $\delta = d$, a, b számok, ahol tehát $\frac{|a-b|}{2} = r$, $\frac{a+b}{2} = d$. Ezekből

$$ab = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{|a-b|}{2}\right)^2 = d^2 - r^2.$$

Az A, B pontok i inverziónál származó A', B' képeinek megfelelő számok $\frac{\lambda}{a}$, $\frac{\lambda}{b}$, tehát a k kör k' képének középpontjának a

$$\delta' = \frac{\frac{\lambda}{a} + \frac{\lambda}{b}}{2} = \frac{a+b}{2}\frac{\lambda}{ab} = \frac{\lambda d}{d^2 - r^2}$$

szám felel meg, míg k' sugara

$$r' = \left|\frac{\frac{\lambda}{a} - \frac{\lambda}{b}}{2}\right| = \left|\frac{b-a}{2}\frac{\lambda}{ab}\right| = \left|\frac{\lambda r}{d^2 - r^2}\right|.$$

A képkör sugara tehát $\frac{R^2 r}{|d^2 - r^2|}$, míg a képkör középpontjának az inverzió centrumától mért távolsága $d' = \frac{R^2 d}{|d^2 - r^2|}$.

1.15. Tegyük fel először, hogy i kicseréli egymással A-t és B-t és tekintsünk az A, B pontokon átmenő *tetszőleges* k kört. Az inverzió paramétere, a $\lambda = OA \cdot OB$ mennyiség egyben az O pont k körre vonatkozó hatványa. Legyen C a k kör egy tetszőleges további pontja és az OC egyenes még D-be messe k-t – illetve legyen $D = C$, ha OC érintő. Az O pont k körre vonatkozó hatványa ezen a szelőn is leolvasható: $\lambda = OC \cdot OD$, azaz i kicseréli C- tés D-t is, tehát k-t önmagára képezi.

Megfordítva, tegyük most fel, hogy a k kör önmagára képződik az O centrumú i inverziónál. Az A pont képe az OA egyenes és a k kör A-tól különböző metszéspontja, tehát B. Ez épp azt jelenti, hogy A és B kicserélődik egymással az i inverziónál.

1.16. Tekintsük az $AA' = a$ egyenest. Az A-t és A'-t kicserélő O inverzió centruma az inverzió definíciója szerint az AA' egyenesen van és különbözik az A, A' pontoktól. Megfordítva, ha O az a egyenes A-tól és A'-től különböző tetszőleges pontja, akkor az O centrumú $OA \cdot OA'$ paraméterű inverzió kicseréli egymással az A, A' pontokat (ha O az AA' szakasz belső pontja, akkor az $OA \cdot OA'$ szorzat értékét tekintsük negatívnak).

A továbbiakban két esetet különböztetünk meg aszerint, hogy B illeszkedik-e a-ra vagy nem illeszkedik rá.

Ha B nem illeszkedik a-ra, akkor tekintsük az $AA'B$ háromszög k körülírt körét. Az 1.15 feladat eredménye szerint az A-t és A' egymással kicserélő inverzió önmagára képezi a k kört, tehát B-t a k valamely A-tól és A'-től különböző pontjába viszi. Másrészt ha B' a k kör tetszőleges A-től és A'-től különböző pontja és a $BB' = b$ egyenes – illetve $B = B'$ esetén a k kör B–beli b érintője – az O pontban metszi a-t, akkor O különbözik az A, A' pontoktól és az O centrumú, $\lambda = OA \cdot OA'$ paraméterű inverzió k-t önmagára, B-t B'-re képezi. Előfordulhat, hogy az a, b egyenesek párhuzamosak egymással, ekkor nincs inverzió, szerepét az AA' szakasz t felezőmerőlegesére való tengelyes tükrözés veszi át, az cseréli ki egymással A-t és A'-t, illetve B-t és B'-t. A keresett mértani hely tehát a k kör kivéve három pontot: A-t, A'-t és B t-re vonatkozó tükörképét.

Ha B illeszkedik a-ra, akkor tekintsük ezt az egyenest számegyenesnek. Az A, A', B pontokhoz illetve a keresett B' ponthoz rendelt valós számok legyenek rendre α, α', β illetve β'. Az O pont akkor és csakis akkor megfelelő inverziós centrum, ha az O-nak megfeleltetett x valós számra

$$(\alpha - x)(\alpha' - x) = (\beta - x)(\beta' - x). \tag{1}$$

A zárójelek felbontása után x-re lineáris egyenletet kapunk, mely rendezéssel a

$$\alpha\alpha' - \beta\beta' = x\left((\alpha + \alpha') - (\beta + \beta')\right) \tag{2}$$

alakra hozható. A 2 reláció jobb oldalán az x együtthatója pontosan akkor zérus, ha $\frac{\alpha+\alpha'}{2} = \frac{\beta+\beta'}{2}$, azaz ha az AA', BB' szakaszok felezőpontja egybeesik. Ebben az esetben nincs inverzió, hanem egy középpontos tükrözés van helyette,

Minden más esetben a 2 egyenletből egyértelműen meghatározható x értéke és az 1 szorzat megadja az inverzió paraméterét. Ez csak akkor lehet zérus, ha az 1 reláció egyszerre mindkét oldalán nulla áll, tehát csak akkor, ha az A, A' pontok egyike megegyezik a B, B' pontok egyikével. Ilyenkor tényleg nincs megfelelő inverzió, vagy triviális az állítás ($A = B$ és $A' = B'$ ill. $A = B'$ és $A' = B$). Tehát B' az a egyenes tetszőleges pontja lehet, kivéve három pontot: A-t és A'-t, valamint a B pont AA' felezőpontjára vonatkozó tükörképét.

1.17. Az inverzió centruma az AA' egyenes egy olyan O pontja amelyre

$$OA \cdot OA' = OC^2. \tag{1}$$

Ha A, A' és C nem kollineáris, akkor a fenti összefüggés a szelőtétel alapján úgy is értelmezhető, hogy az $AA'C$ háromszög körülírt körét érinti az OC egyenes, azaz O a ponthármas körülírt köre C-beli érintőjének az AA' egyenessel való metszéspontja.

Az A, A', C pontok kollineárisak is lehetnek. Erre az esetre térjünk vissza az 1.18. feladat megoldása után!

1.18.

1. megoldás. a)-b) Egyszerre kezeljük a két feladatrészt. A példának akkor van értelme, ha az A és a B pont – illetve A és A' – egymástól különböző.

Messe az AB egyenes a K kört a T_1, T_2 pontokban. Ha T_1T_2 nem átmérője K-nak, akkor A és B nem egymás képe a K körre vonatkozó inverziónál és K nem is Apollóniusz köre az A, B pontpárnak.

Tegyük fel a továbbiakban, hogy T_1T_2 a K kör átmérője és T_1 elválasztja az A, B pontokat. Tekintsük a K kör T_1-től és T_2-től különböző C pontját és képezzük az $ACB\angle$ szög belső szögfelezőjének AB egyenessel vett H metszéspontját. A szögfelező-tétel értelmében C akkor és csakis akkor van rajta az A, B pontpár T_1-et is tartalmazó Apollóniusz körén, ha $H = T_1$.

A G.II.6.30. feladat eredményét fogjuk használni. Eszerint, ha az ABC háromszög L körülírt körének C-beli érintője az AB egyenest a P pontban metszi, akkor $PC = PH$, tehát a P középpontú PC sugarú kör átmegy H-n.

Ha A és B egymás képe a K körre vonatkozó inverziónál, akkor az L kör önmagára képződik ennél az inverziónál, így az 1.19. feladat állítása szerint az L kör C-beli érintője átmegy O-n, tehát $P = O$, $H = T_1$, így K valóban Apollóniusz kör.

Megfordítva, ha K az A, B pontpár Apollóniusz köre, akkor $H = T_1$, így a CH szakasz felezőmerőlegese – ami átmegy P-n – egyben a K kör CT_1 húrjának is felezőmerőlegese, így $P = O$. Ekkor OC érinti L-t C-ben tehát az 1.19. feladat állítása szerint L fix a K-ra vonatkozó inverziónál, azaz A és B kicserélődik.Q.E.D.

2. megoldás. Az 1.18M1. elején leírtakból indulunk ki, tehát feltesszük, hogy az AB egyenes a K kör egy átmérő T_1, T_2 pontjaiban metszi. Ebben az esetben K pontosan akkor Apollóniusz köre az A, B pontpárnak, ha

$$\left|\frac{AT_1}{T_1B}\right| = \left|\frac{AT_2}{T_2B}\right| \tag{1}$$

és pontosan akkor cseréli ki a K-ra vonatkozó inverzió A-t és B-t, ha

$$OA \cdot OB = OT_1 \cdot OT_2, \tag{2}$$

ahol O a T_1T_2 szakasz felezőpontja, K középpontja. Számoljunk az OT_1 egyenesen irányított távolságokkal, tehát mintha a számegyenesen lennénk:

$$OT_1 = r, \qquad OT_2 = -r, \qquad OA = p, \qquad OB = q,$$

tehát

$$AT_1 = r - p, \qquad T_1B = q - r, \qquad AT_2 = -r - p, \qquad T_2B = q + r.$$

Ezekkel a jelölésekkel az (1) egyenlet átszorzás után így írható:

$$\left|(r-p)(q+r)\right| = \left|(q-r)(-r-p)\right|,$$

azaz

$$\left|(r^2 - pq) + r(q-p)\right| = \left|(r^2 - pq) - r(q-p)\right|. \tag{3}$$

Mivel A és B különböző és K valódi kör, így az $r(q-p)$ mennyiség zérustól különböző. Ebben az esetben a (3) összefüggés pontosan akkor teljesül, ha $r^2 = pq$, azaz ha (2) fennáll. Q.E.D.

3. megoldás. Illesszünk koordinátarendszert az ábrához úgy, hogy K legyen annak origó középpontú egységköre, tehát K egyenlete

$$x^2 + y^2 - 1 = 0. \tag{1}$$

Ha A koordinátái $A(\xi;\eta)$, akkor K-ra vonatkozó A' inverzének koordinátái (lásd az 1.12. feladatot) $A'\left(\frac{\xi}{\xi^2+\eta^2};\frac{\eta}{\xi^2+\eta^2}\right)$. Fontos lesz, hogy A nincs rajta a K körön, tehát $\xi^2 + \eta^2 - 1 \neq 0$. Az olyan C pontok alkotják az A, A' pontpár Apollóniusz körét, amelyekre valamely α számmal

$$PA^2 = \alpha PA'^2. \tag{2}$$

Ezen Apollóniusz kör egyenlete tehát

$$(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 = \alpha^2\left(\left(x - \frac{\xi}{\xi^2+\eta^2}\right)^2 + \left(y - \frac{\eta}{\xi^2+\eta^2}\right)^2\right). \tag{3}$$

Vegyük észre, hogy ebből $\alpha^2 = \xi^2 + \eta^2$ esetén kiesnek a lineáris tagok és rendezés, majd a zérustól különböző $(\xi^2 + \eta^2 - 1)$ mennyiséggel való leosztás után épp a K kör (1)-ben adott egyenletéhez jutunk, tehát K az A, B pontpár Apollóniusz köre.

Másrészt, ha az $A(\xi;\eta)$, $A'(\xi';\eta')$ pontpár (2) szerinti $\alpha \neq \pm 1$ paraméterhez tartozó Apollóniusz körének egyenlete

$$(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 - \alpha^2\left((x-\xi')^2 + (y-\eta')^2\right) = 0, \tag{4}$$

ami a zárójelek felbontása, rendezés és $(1-\alpha^2)$-tel való leosztás után

$$x^2+y^2-2x\frac{\xi-\alpha^2\xi'}{1-\alpha^2}-2y\frac{\eta-\alpha^2\eta'}{1-\alpha^2}-\frac{\alpha^2\xi'^2-\xi^2+\alpha^2\eta'^2-\eta^2}{1-\alpha^2}=0. \tag{5}$$

Ez az egyenlet pontosan akkor lesz az origó középpontú egységsugarú kör egyenlete, ha

$$\begin{aligned} \xi &= \alpha^2\xi'; \\ \eta &= \alpha^2\eta'; \\ 1-\alpha^2 &= \alpha^2\xi'^2-\xi^2+\alpha^2\eta'^2-\eta^2. \end{aligned}$$

Ha az utolsó egyenletben ξ' és η' helyére beírjuk az első egyenletből leolvasható kifejezéseket, majd sorozzuk a két oldalt $\frac{\alpha}{1-\alpha^2}$-tel, akkor kapjuk, hogy

$$\alpha^2=\xi^2+\eta^2, \quad \xi'=\frac{\xi}{\xi^2+\eta^2}, \quad \eta'=\frac{\eta}{\xi^2+\eta^2},$$

tehát A' az A képe az egységkörre vonatkozó inverziónál. Q.E.D.

1.19. A) $\iff$ B) illetve **A) $\iff$ B')**

Legyen a két kör középpontja O_K és O_L, és a körök T metszéspontjában érintőjük e_K illetve e_L. K középpontjából az L-hez húzott érintő érintési pontja természetesen az L körön van, tehát pontosan akkor van a K körön is, ha az egyik ilyen érintési pont épp T.

Minden körben igaz, hogy az érintési ponthoz húzott sugár merőleges az érintőre: $O_KT\perp e_K$, $O_LT\perp e_L$.

Tehát a merőleges szárú szögek miatt

$$e_K\perp e_L \iff O_KT\perp O_LT. \tag{1}$$

Megfordítva, a kör egy pontján átmenő egyenes pontosan akkor érintő, ha merőleges a kör adott pontjához húzott sugárra. Tehát O_KT pontosan akkor érinti L-t, ha $O_LT\perp O_KT$. Az 1 ekvivalencia igazolja A) és B) illetve A) és B') ekvivalenciáját.

A) $\iff$ C)

Az R_K, R_L, d mennyiségek az O_KTO_L háromszög oldalai. Tehát a Pitagorasz tétel és megfordítása szerint a $R_K^2+R_L^2-d^2=0$ egyenlet pontosan azt fejezi ki, hogy $O_KTO_L\angle=90°$, azaz azt, hogy az O_KO_L sugarak egymásra merőlegesek. Így újra (1) igazolja az ekvivalenciát.

B) $\Longrightarrow$ D)

Ha P az L kör tetszőleges pontja és az O_KP egyenes még Q-ban metszi L-t, akkor az O_K pont L-re vonatkozó hatványa az érintőn számolva $O_KT^2=R_K^2$, a szelőn számolva $O_KP\cdot O_KQ$ és a kettő egyenlősége épp azt fejezi ki, hogy P és Q kicserélődik a K-ra vonatkozó inverziónál.

D) $\Longrightarrow$ B)

A feltétel szerint van L-nek olyan P pontja, amely nem fix az inverziónál. Ha ezzel a P-vel az O_KP egyenes még Q-ban metszi L-t, akkor szükségképpen P és Q kicserélődik a K-ra vonatkozó inverziónál, tehát

$$O_KP\cdot O_KQ=R_K^2. \tag{2}$$

A fenti összefüggés (és $P\neq Q$) azt is jelenti, hogy P és Q egyike a K körön kívül, a másik a körön belül van, tehát a P-n és Q-n átmenő L kör metszi K. Ha az egyik metszéspont T, akkor annak képe az inverziónál önmaga. Ha O_KT érinti L-t, akkor készen vagyunk B) igazolásával. Ha nem érinti, hanem O_KT-nek L-lel van egy T-től T' metszéspontja is, akkor D) miatt T' képe is önmaga lesz a K-ra vonatkozó inverziónál, tehát TO_KT' a K kör egy átmérője. Mivel L valódi kör (nem az átmérő egyenese) és konvex, így O_K az L belsejében van. Ez kizárja, hogy O_K centrumú pozitív (R_K^2) paraméterű inverzió önmagára képezze L-t.

D') $\iff$ B), mint **D) $\iff$ B)** fent.

D) $\iff$ E)

A $P,Q\in L$ pontpár pontosan akkor cserélődik ki a K-ra vonatkozó inverziónál, ha $O_KP\cdot O_KQ=R_K^2$, de a szelőtétel miatt ez egyszerre teljesül az összes O_K-ból L-hez húzott szelőn, tehát pontosan akkor teljesül, ha L fix az inverziónál, de nem fix minden pontja.

D') $\iff$ E), mint **D) $\iff$ E)**

C) $\iff$ F)

Az

$$a(x^2+y^2)+bx+cy+d=0$$

egyenlet így írható át:

$$a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\left(y+\frac{c}{2a}\right)^2-\frac{b^2+c^2-4ad}{4a^2}\right), \tag{3}$$

tehát ez olyan kör egyenlete, amelynek középpontja valamint sugarának négyzete

$$O\left(-\frac{b}{2a};-\frac{c}{2a}\right), \qquad R^2=\frac{b^2+c^2-4ad}{4a^2}. \tag{4}$$

Így

$$d^2=O_1O_2^2=\left(\frac{b_K}{2a_K}-\frac{b_L}{2a_L}\right)^2+\left(\frac{c_K}{2a_K}-\frac{c_L}{2a_L}\right)^2=\frac{b_K^2}{4a_K^2}+\frac{b_L^2}{4a_L^2}+\frac{c_K^2}{4a_K^2}+\frac{c_L^2}{4a_L^2}-\frac{b_Kb_L+c_Kc_L}{2a_Ka_L}, \tag{5}$$

$$R_K^2+R_L^2=\frac{b_K^2}{4a_K^2}+\frac{b_L^2}{4a_L^2}+\frac{c_K^2}{4a_K^2}+\frac{c_L^2}{4a_L^2}-\frac{d_K}{a_K}-\frac{d_L}{a_L}, \tag{6}$$

tehát

$$R_K^2 + R_L^2 - d^2 = \frac{-2a_K d_L + b_K b_L + c_K c_L - 2d_K a_L}{2a_K a_L}, \tag{7}$$

ami igazolja C) és F) ekvivalenciáját.

1.22. a) Legyen az inverzió alapköre i, centruma O, az adott egyenes e, két pontja A és B, az O merőleges vetülete e-n T, az O tükörképe e-re Q, a T, Q pontok valamint az e egyenes képe az i-re vonatkozó inverziónál a T', Q' pontok illetve az e' kör.

Az e' kör az OT' szakasz Thalesz köre, ennek középpontja Q', hiszen $\frac{OQ}{OT} = 2$, így $\frac{OQ'}{OT'} = \frac{1}{2}$.

A Q pont az A ill. B középpontú O-n átmenő körök O-tól különböző metszéspontja, így könnyen szerkeszthető. Ezek után Q' az 1.2. feladat megoldása alapján szerkeszthető és az e' kör is adottnak tekinthető.

1.23. a) Nem igaz. Két koncentrikus körhöz nincs ilyen kör. Minden más esetben van ilyen kör, a két kör hatványvonalán választhatunk olyan pontot, amely mind a két körön kívül esik. Ez a pont a merőleges kör középpontja, sugara az innen az adott körökhöz húzott érintő hossza.

b) Igaz. Két nem koncentrikus kör esetén ezt a)-ban láttuk. Két koncentrikus kör esetén bármelyik egyenes jó, amely átmegy a középponton. Kör és egyenes esetén megfelelő a kör középpontjából az egyenesre bocsájtott merőleges egyenes, de bármely olyan kör is megfelelő, amelynek középpontja az adott egyenesen van, sugara pedig a középpontból az adott körhöz húzott érintő hosszával egyezik meg. Két metsző egyenesre merőlegesek a metszéspontjuk köré, mint középpont köré írt körök. Párhuzamos egyenespárhoz végtelen sok rájuk merőleges egyenest találhatunk.

1.24. e) A szerkesztendő kör középpontjának hatványa a három kör mindegyikére egyenlő. Ez a középpont tehát illeszkedik a körök közül bármelyik kettő hatványvonalára.

Ha két ilyen hatványvonal metszi egymást, akkor a metszéspont megfelelő középpontnak és más középpont nem is lehetséges. A kör sugara a középpontból a három kör bármelyikéhez húzott érintő hossza. (Ha nincs érintő, a hatványpont a körök belső pontja, akkor a szerkesztendő kör sem létezik.)

Ha két ilyen hatványvonal párhuzamos, akkor nem létezik a keresett kör.

Ha két hatványvonal egybeesik, akkor a közös hatványvonal bármelyik olyan pontja megfelelő középpont, amelyik a körök bármelyikének (és így mindegyiknek) határán vagy külsejében van.

a) A hatványvonalak metszéspontja, a három kör hatványpontja a körökön kívül helyezkedik el, tehát van ilyen kör.

b) A hatványpont a körök belső pontja, most nincs megfelelő kör.

c) A körpárok hatványvonalai egybeesnek (a három kör egy körsor három tagja), végtelen sok megfelelő kör van.

d) A hatványvonalak párhuzamosak, nincs hatványpont, merőleges kör sincs. Egyenes viszont van, a közös centrális mindegyik körre merőleges.

f) Ha a körpárok hatványvonalai párhuzamosak egymással, akkor a körök középpontjai egy egyenesen vannak. Ebben az esetben a közös centrálisra való tükrözés önmagára képezi mindhárom kört.

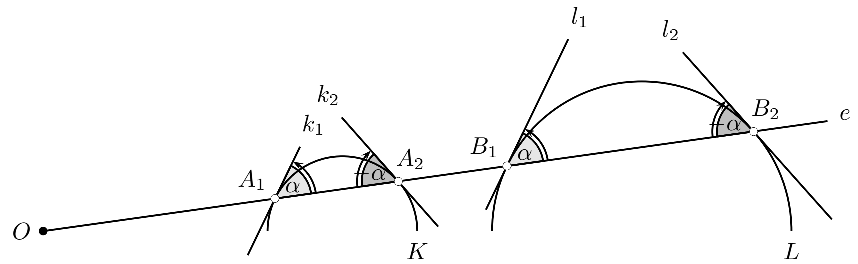
Minden más esetben van olyan pont, amelynek mindegyik körre azonos a hatványa. Ha a három kör középpontja nincs egy egyenesen, akkor egyetlen ilyen pont van. Ha egy egyenesen vannak a középpontok, akkor a páronkénti hatványvonalak vagy párhuzamosak (ezt az előbb vizsgáltuk) vagy egybeesnek a hatványvonalak (a körök egy körsor elemei), ilyenkor végtelen sok megfelelő pont van.

Ha ez – az egyik ilyen – H és H közös hatványa a három körre λ, akkor a H centrumú λ paraméterű inverzió önmagára képezi a három kört. Ha $\lambda > 0$, akkor ez egy körre vonatkozó inverzió, ha $\lambda < 0$, akkor az inverziónak nincs alapköre, azaz pontonként fix köre. Ha a három körnek közös a hatványvonala, akkor ezen van olyan pont is, amelynek pozitív a három körre vonatkozó hatványa.

Ha csak $\lambda = 0$ valósul meg, tehát a három körnek egy közös pontja van, amelyben nem érintik egymást, akkor és csakis akkor nincs megfelelő inverzió, se tükrözés.

1.25. a) Tegyük fel, hogy az O centrumú λ paraméterű i inverzió egymásba képezi az K, L köröket. Ez az O-n átmenő tetszőleges e egyenesen azt jelenti, hogy ha e a K kört az A_1, A_2, az L kört a B_1, B_2 pontokban metszi, akkor i az A_1, A_2 pontokat a B_1, B_2 pontokba képezi.

Alább igazolni fogjuk, hogy O a K, L körök hasonlósági pontja. Ehhez azt fogjuk felhasználni, hogy az inverzió és a középpontos nagyítás is önmagára képezi az e egyenest, és mindkét transzformáció szögtartó, de míg a nagyítás irányítástartó, addig az inverzió megfordítja az irányítást. (Lásd az 1. ábrát)



1.25M.1. ábra.

Tegyük fel, hogy $i(A_1) = B_2$ és $i(A_2) = B_1$ azaz

$$OA_1 \cdot OB_2 = OA_2 \cdot OB_1 = \lambda. \tag{1}$$

Ebből

$$\frac{OA_2}{OA_1} = \frac{OB_2}{OB_1}, \tag{2}$$

tehát egy megfelelő arányú, O centrumú χ középpontos nagyítás az A_1 pontot B_1-be, egyúttal A_2-t B_2-be viszi.

Jelölje a K kör A_1-, ill. A_2-beli érintőjét k_1 ill. k_2, az L kör érintőit B_1-ben ill. B_2-ben l_1 ill. l_2. Az egyenes és a kör metszési tulajdonsága szerint irányított szögekkel számolva

$$ek_1\sphericalangle \equiv -ek_2\sphericalangle \pmod{180^{circ}}; \qquad el_1\sphericalangle \equiv -el_2\sphericalangle \pmod{180^{circ}}. \tag{3}$$

Az inverzió megtartja a szöget, de az irányítását megfordítja, így

$$ek_1\sphericalangle \equiv -el_2\sphericalangle \pmod{180^{circ}}; \qquad ek_2\sphericalangle \equiv -el_1\sphericalangle \pmod{180^{circ}}. \tag{4}$$

A (3), (4) relációk összevetéséből következik, hogy

$$ek_1\sphericalangle \equiv el_1\sphericalangle \pmod{180^{circ}}; \qquad ek_2\sphericalangle \equiv el_2\sphericalangle \pmod{180^{circ}}. \tag{5}$$

A χ középpontos nagyítás a K kör A_1, A_2 pontjait az L kör B_1, B_2 pontjaiba képezi és a K-kör $\chi(K)$ képének érintői B_1-ben és B_2-ben megegyeznek az L kör érintőivel. Ebből következik, hogy $\chi(K) = L$, azaz O a K, L körök hasonlósági pontja.

Megfordítva, ha O a K, L körök hasonlósági pontja, és a hasonlóság arány μ, azaz az O-t tartalmazó e egyenes és a K, L körök $A_1, A_2 \in K$, $B_1, B_2 \in L$ metszéspontjaira $\frac{OB_1}{OA_1} = \frac{OB_2}{OA_2} = \mu$, akkor

$$OA_2 \cdot OB_1 = OA_1 \cdot OB_2 = \mu OA_1 \cdot OA_2,$$

tehát ha λ az O pont K körre vonatkozó hatványának μ-szöröse, akkor az O centrumú λ arányú inverzió felcseréli egymással a K, L köröket.

Ha a K, L körök nem koncentrikusak és nem is azonos sugarúak, akkor két különböző pontból nagyítható K az L-be, az egyik nagyítás aránya (külső hasonlósági pont) pozitív a másik aránya negatív (belső hasonlósági pont). Az előbbihez tartozó inverzió egy körre vonatkozó inverzió ($\lambda > 0$), a másik inverziónak nincsenek fixpontjai $\lambda < 0$.

Ha a K, L körök koncentrikusak, akkor közös középpontjukból kétféleképpen invertálhatók egymásba: az egyik paramétere pozitív, a másiké negatív.

Ha a K, L körök nem koncentrikusak, de azonos sugarúak, akkor csak egy negatív paraméterű inverzióval képezhetők egymásra, a pozitív paraméterű inverzió tengelyes tükrözéssé fajul.

1.26. Ez a középpont a három hozzáírt kör hatványpontja (lásd az 1.24. feladatot).

Vizsgáljuk most az AB oldalhoz kifelé írt i_C hozzáírt és az AC oldal külső oldalán található i_B hozzáírt körök h_A hatványvonalát. Ez a hatványvonal merőleges a két kör centrálisára, ami az ABC háromszög A csúcsánál található szögének külső szögfelezője. Tehát h_A párhuzamos a $BAC\angle$ belső szögfelezőjével.

Tekintsük most a BC oldalegyenest, amely a T_C pontban érinti az i_C kört és T_B-ben i_B-t. Ismeretes, hogy $CT_C = BT_B = s$ a háromszög félkerülete. Emiatt $BT_C = CT_B = s - a$, ahol $a = BC$. Ez azt jelenti, hogy a két kör T_BT_C közös érintőjének felezőpontja a BC oldal F_A felezőpontja.

Így $F_A \in h_A$, tehát h_A az F_A ponton át a háromszög A-nál fekvő szögének belső szögfelezőjével párhuzamosan húzott egyenes, azaz az az ABC háromszög $F_BF_AF_C$ középháromszögének szögfelezője. A három hozzáírt kör hatványpontja tehát az ABC háromszög középháromszögében a beírt kör középpontja.

Ez a pont nyilvánvalóan kívül van a hozzáírt körökön, tehát a rájuk vonatkozó egyenlő hatványa pozitív mennyiség. Ha e mennyiség gyökével, mint sugárral kört rajzolunk a hatványpont köré, akkor az adott hozzáírt körök mindegyikére merőleges kört kapunk.

1.27. Általában 8 olyan kögyenes van, amely érint három olyan kört, amelyek közül semelyik kettő sem érinti egymást. Ha ez a három kör kölcsönösen egymás külsejében van, akkor ez a 8 kör így írható le:

(i) 1 olyan kör van, amely mindegyik adott kör külsejében van és mindegyik adott kör is az ő külsejében van (nevezetes, hogy az adott esetben ez épp a háromszög Feuerbach köre);

(ii) 3 olyan kör van, amely az adott körök közül egyet a belsejében, kettőt pedig a külsejében tartalmaz. Ezeket keressük;

(iii) 3 olyan kör van, amely az adott körök közül kettőt a belsejében, egyet pedig a külsejében tartalmaz. Most ezek – vagy az előbbiek, ez még nem látszik – három egyenessé, az adott háromszög oldalegyeneseivé fajul;

(iv) 1 olyan kör van, amely mindegyik adott kört a belsejében tartalmazza.

Van egy olyan h kör, amely merőleges a háromszög három hozzáírt körére. Az 1.26. feladatban láttuk, hogy ennek középpontja az adott ABC háromszög $F_AF_BF_C$ középháromszöge beírt körének H középpontja. A h körre vonatkozó inverzió önmagára képezi az ABC háromszög hozzáírt köreit, így egymásra képezi az azokat érintő (i)-(iv) kögyeneseket.

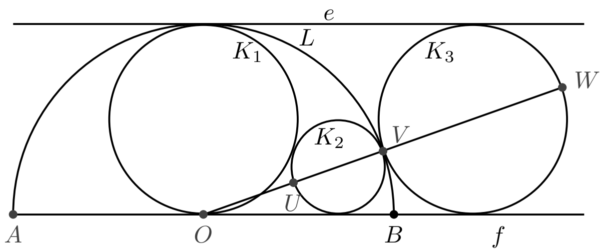
A BC oldalegyenes egyik oldalán van az AB és a BC oldalhoz hozzáírt i_C és i_B kör és itt van a teljes ABC háromszög is a H ponttal együtt, míg a BC egyenes másik oldalán van a BC oldalhoz hozzáírt i_A kör. A h-ra vonatkozó inverzió ezért a BC egyenest egy olyan m_A körbe képezi, amely belsejében tartalmazza az i_A kört és a külsejében az i_B, i_C köröket. Ráadásul, ez az m_A kör, lévén egy egyenes inverz képe, átmegy a h inverzió H centrumán is. Ugyanígy kaphatók a keresett m_B, m_C körök a háromszög CA, AB egyeneseinek h inverziónál származó képeiként és ugyanezért ők is mind átmennek az inverzió H centrumán.

Ezzel a feladat állítását igazoltuk.

1.28. Legyen O L középpontja, legyen e egyenes az az AB-vel párhuzamos egyenes, mely érinti L-t. Ekkor, ha az érintési pont C, akkor ezen átmegy K_1-is. Legyen K_3 az a K_1-n kívüli kör, mely érinti AB-t, e-t, és L-t is, és B-hez közelebb van, mint A-hoz. Legyen továbbá U, V pontok K_2-nek, ill. az annak középpontján és az O ponton átmenő egyenesnek a metszéspontjai, és legyenek V_1, W pontok K_3-nak, ill. annak középpontján és az O-n átmenő egyenesnek metszéspontja (lásd az 1. ábrát). Vizsgáljuk az L határolókörére való invertálást! Ez az O-n átmenő körökből egyenest csinál, az alapkör pontjait helybenhagyja, és érintő görbékből érintőt csinál. Ezek alapján K_1-ből e lesz, és minden egyéb körből kört csinál, tehát K_2-ből AB-t (mert ez fixegyenes), e-t (K_1 képét), illetve L-t érintő kör lesz. Ilyenből csak kettő van, K_3, és ennek tükörképe AB felezőmerőlgesére, e kettő közül nyilván K_3 lesz. Innen az is kiderül, hogy $V = V_1$, azaz O, U, V, W pontok egy egyenesen vannak. Nyilván UV, ill VW a K_2, ill K_3 körök átmérői, de K_3 átmérője $d/2$, mert ennyi a távolság AB, ill. e egyenesek között, amik közé írtuk K_3-at. Innen $d/2 = OV = VW$, de W inverz képe nyilván U, ezért $OW \cdot OU = OV^2$, de $OW = OV + VW = d$, innen $d \cdot OU = (d/2)^2$ innen $OU = d/4$, és $UV = OV - OU = d/2 - d/4 = d/4$. Tehát K_3 sugara $d/8$.

1.29. Alkalmazzunk egy C centrumú i inverziót! Mivel a C pont hatványa az A középpontú k_A körre és a B középpontú k_B körre egyaránt 16, így érdemes a C középpontú 4 egység sugarú i körre invertálni, ennél k_A és k_B is önmagába megy át. Az inverzió azért hasznos, mert a C-n átmenő körök képei egyenesek. Feladatunk tehát abból áll, hogy megszerkesszük a k_A és k_B körök képét – ezzel készen is vagyunk, $k'_A = k_A$, $k'_B = k_B$ – majd megszerkesszük a képkörök érintőegyeneseit – e_1, e_2 a közös külső érintők lesznek, míg f_1, f_2 a belső érintők – végül invertáljuk a négy érintőt i-re, ezek a képek lesznek a C-n átmenő k_A-t és k_B érintő körök.

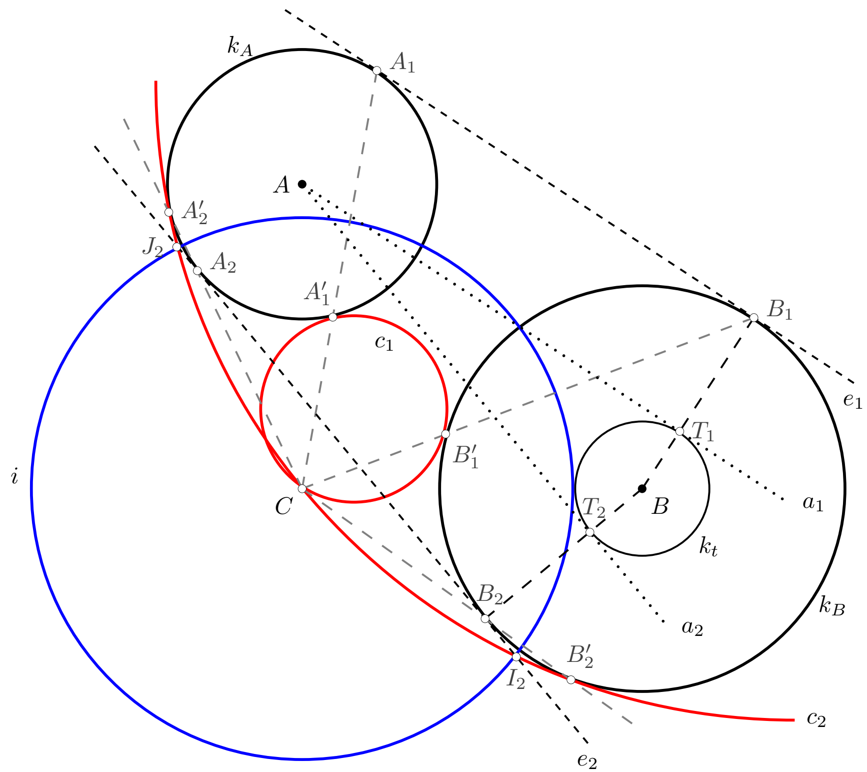
Az 1. ábrán követhető a szerkesztés a külső érintőkkel és a 2. ábrán a belső érintőkkel.



1.28M.1. ábra.

A k_A, K_B körök közös külső érintőinek szerkesztéséhez k_B sugarát csökkentettük k_A sugarával, így kaptuk a k_t kört. Ehhez megszerkesztettük az A pontból az $AT_1 = a_1$, $AT_2 = a_2$ érintőegyeneseket. Az ezekre B-ből merőlegesen állított félegyenesek kimetszették k_B-ből a valódi külső érintők B_1, B_2 érintési pontjait. Az ezeken átmenő a_1-gyel illetve a_2-vel párhuzamos egyenes e_1 és e_2 a két kör közös külső érintője, rajtuk A_1, illetve A_2 a k_A kör érintési pontja.

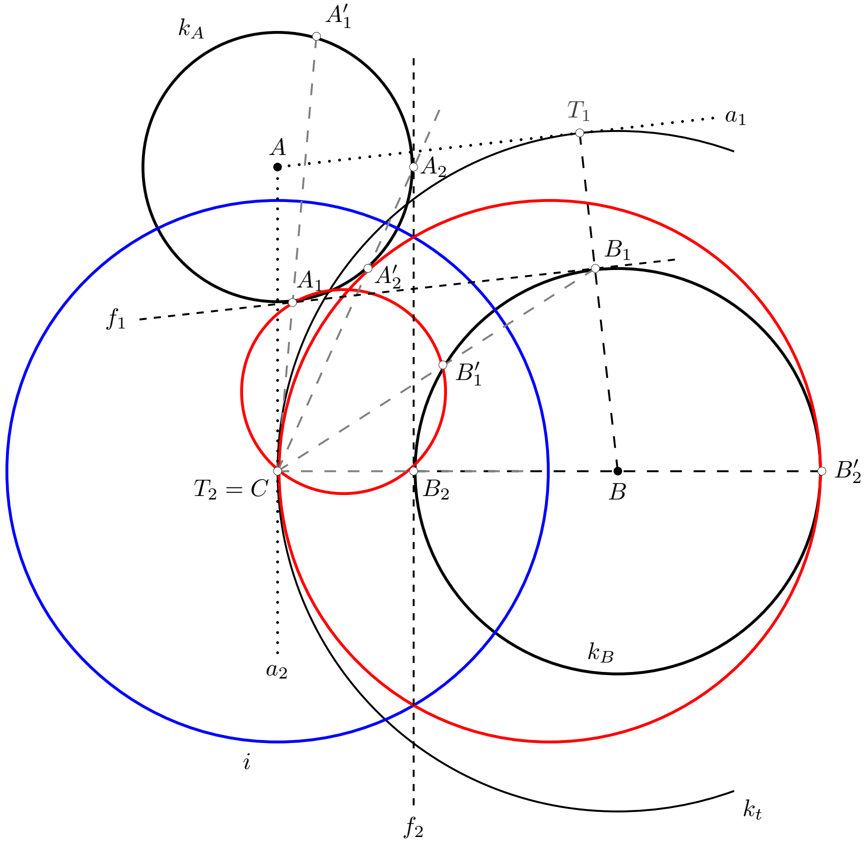
A CA_1 egyenes és a k_A kör másik metszéspontja A'_1 ez a pont az A_1 képe az i inverziónál. Hasonlóan szerkesztehtők az A_2, B_1, B_2 pontok A'_2, B'_1, B'_2 inverz képei. A szerkesztendő körök az e_1, e_2 egyenesek inverz képei, tehát a $CA'_1B'_1$, $CA'_2B'_2$ ponthármasok körülírt körei. Természetesen e_2 képe átmegy az e_2 egyenes és az i kör I_2, J_2 metszéspontjain is.



1.29M.1. ábra.

1.30. a) Az 1.29. feladat megoldásának mintájára járhatunk el. Az adott C pont egy i inverzió centruma. A szerkesztendő körök i-nél származó képeit szerkesztjük meg, azaz olyan egyeneseket, amelyek érintik az adott körök i-nél származó képeit.

1.31. Invertáljunk egy A középpontú körre, pl a B-n átmenő i körre (lásd az 1. ábrát)! A k kör képe egy B-n átmenő k' egyenes, a k_A kör képe egy k'-vel párhuzamos k'_A egyenes, míg k_B képe egy k'-t B-ben érintő kör, amely valamely M' pontban érinti k'_A-t. Az M' pont a k'-re B-ben állított merőleges egyenesen, m'-n lehet, és ott bárhol. Az m' egyenes az A-n és B-n is áthaladó k-ra merőleges m kör, ez a keresett mértani hely.



1.29M.2. ábra.

1.32.

1. megoldás. A **??**. megoldás lemmája szerint az E_KE_LA, F_KF_LA háromszögek körülírt körei pontosan akkor érintik egymást A-ban, ha

$$E_KE_LA\sphericalangle + AF_LF_K\sphericalangle \equiv E_KAF_K\sphericalangle \pmod{180^\circ}. \tag{1}$$

Az E_KAF_K háromszögben

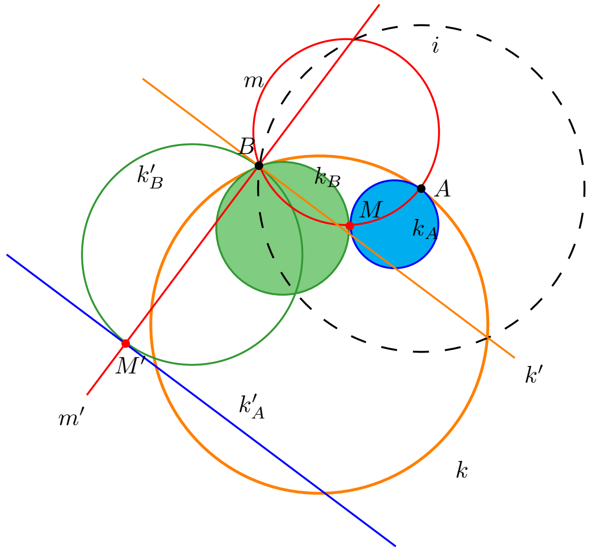
$$E_KAF_K\sphericalangle \equiv 180^\circ - F_KE_KA\sphericalangle - AF_KE_K\sphericalangle \pmod{180^\circ} \tag{2}$$

és a K körben az F_KA, E_KA húr kerületi szögei egyenlők az érintő szárú kerületi szögekkel, azaz

$$F_KE_KA\sphericalangle \equiv F_LF_KA\sphericalangle \pmod{180^\circ}, \qquad AF_KE_K\sphericalangle \equiv AE_KE_L\sphericalangle \pmod{180^\circ}, \tag{3}$$

így

$$E_KAF_K\sphericalangle \equiv 180^\circ - \frac{F_LF_KE_K\sphericalangle + F_KE_KE_L\sphericalangle}{2} \pmod{180^\circ}. \tag{4}$$



1.31M.1. ábra.

Ehhez hasonlóan, az L kör AE_L, F_LA húrjainak kerületi és érintő szárú kerületi szögei:

$$E_KE_LA\sphericalangle \equiv E_LF_LA\sphericalangle \pmod{180^\circ}, \qquad AF_LF_K\sphericalangle \equiv AE_LF_L\sphericalangle \pmod{180^\circ}, \tag{5}$$

és így

$$E_KE_LA\sphericalangle + AF_LF_K\sphericalangle \equiv \frac{E_KE_LF_L\sphericalangle + E_LF_LF_K\sphericalangle}{2} \pmod{180^\circ}. \tag{6}$$

$$\begin{aligned} &E_KE_LA\sphericalangle + AF_LF_K\sphericalangle - E_KAF_K\sphericalangle \equiv \\ \equiv\ &\tfrac{E_KE_LF_L\sphericalangle + E_LF_LF_K\sphericalangle + F_LF_KE_K\sphericalangle + F_KE_KE_L\sphericalangle}{2} \pmod{180^\circ}, \end{aligned} \tag{7}$$

de itt ajobb oldalon az $E_KE_LF_LF_K$ négyszög belső szögösszegének fele áll, így a 7 egyenlet igazolja az 1 relációt, tehát a két kör érinti egymást A-ban.

2. megoldás. Alkalmazzunk A centrumú inverziót. A K, L körök képe egy-egy egyenes lesz – K' és L' –, amelyek metszik egymást (a K, L körök másik metszéspontjának képében).

Az e, f közös érintőegyenesek képe a K' és az L' egyenest is érintő e' és f' kör lesz. Ez a két kör a K', L' egyenesek által határolt négy szögtartomány közül ugyanabban lesz, hiszen az e és az f egyenes is a K, L körök által meghatározott négy tartomány közül ugyanabban - a végtelen nagyban van. Az azonos szögtartományban a szögszárakat érintő körök egymásból egy olyan nagyítással kaphatók, amelynek középpontja a szög csúcsa. Így az egyik kör és a két szár érintési pontját összekötő egyenes párhuzamos a másik kör és a két szár érintési pontjait összekötő egyenessel. Ez a két egyenes épp a E_KE_LA, F_KF_LA körök inverziónál származó képe, tehát ezek a körök valóban érintik egymást A-ban.

1.33.

1. megoldás. Jelölje a k kör érintési pontját l_1-en ill. l_2-n U ill. V, a k, k_1, k_2 körök középpontjait rendre O, O_1 és O_2, az O_1-ből ill. O_2-ből UV-re bocsájtott merőleges talppontját T_1 ill. T_2, az O_2T_2, AO_1 egyenesek metszéspontját T, az O_1T_1, O_2T_2 szakaszok hosszát d_1 ill. d_2. (Lásd a 2. ábrát!)

A G, D, E érintési pontok rendre az érintkező körpárok O_1O, O_2O, O_1O_2 centrálisaira esnek. A G, D, E pontok úgy osztják fel az O_1O_2O háromszög oldalait, hogy a csúcsok felőli részek egymással egyenlőek: $O_1G = O_1E$, $O_2E = O_2D$, $OD = OG$. Könnyű igazolni, hogy csak egyféleképpen oszthatók fel így a háromszög oldalai és, hogy az O_1O_2O háromszög beírt körének érintési pontjai is így osztják fel az oldalakat. Tehát a GP, D, E pontokon átmenő kör az O_1O_2O háromszög beírt köre. A feladat igazolásához ezek után elég megmutatni, hogy $DA \perp OO_2$ és ezzel analóg módon $CB \perp OO_1$.

Ha adott két pont, itt O és O_2, akkor kereshetjük azon P pontok halmazát, amelyeknek a két ponttól való távolsága négyzetének különbsége előre adott állandóval

egyenlő: $OP^2 - O_2P^2 = OD^2 - O_2D^2$. Ismeretes, hogy ez a mértani hely a két adott pontra merőleges egyenes. Ebből kifolyólag elég igazolnunk, hogy ábránkon

$$OA^2 - O_2A^2 = OD^2 - O_2D^2. \tag{1}$$

A (1) relációban az OA^2, O_2A^2 mennyiségek kiszámolásához az OUA, O_2TA derékszögű háromszögeket használjuk. Pitagorasz tétele szerint:

$$\begin{aligned} OA^2 &= r^2 + d_1^2 \\ O_2A^2 &= (2r - r_2)^2 + (d_1 - d_2)^2, \end{aligned} \tag{2}$$

így

$$OA^2 - O_2A^2 = 4rr_2 + 2d_1d_2 - 3r^2 - r_2^2 - d_2^2. \tag{3}$$

Az O_1T_1O, O_2T_2O, O_1TO_2 derékszögű háromszögekre felírjuk a Pitagorasz tételt:

$$\begin{aligned} (r_1 + r)^2 &= d_1^2 + (r_1 + r)^2 \\ (r_2 + r)^2 &= d_2^2 + (r_2 + r)^2 \\ (r_1 + r_2)^2 &= (d_1 - d_2)^2 + (2r - r_1 - r_2)^2 \end{aligned} \tag{4}$$

Az első két egyenletből

$$\begin{aligned} 4rr_1 &= d_1^2 \\ 4rr_2 &= d_2^2, \end{aligned} \tag{5}$$

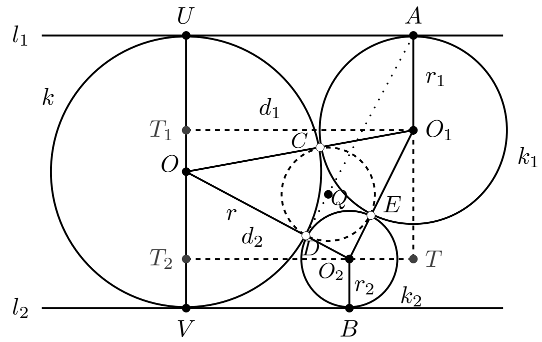
míg a harmadikból ezek felhasználásával

$$2r^2 = d_1d_2. \tag{6}$$

Az (5)-(6) összefüggések alapján (3) így írható:

$$OA^2 - O_2A^2 = 4rr_2 + 4r^2 - 3r^2 - r_2^2 - 4rr_2 = r^2 - r_2^2 = OD^2 - O_2D^2. \tag{7}$$

Épp ezt akartuk igazolni.



1.33M1.2. ábra.

2. megoldás. Lemma L.4.1. Ha a feladat ábráján V az l_2 egyenes és a k kör érintési pontja, míg U az l_1 és k érintési pontja, akkor V, C és A egy egyenesen vannak, U, C és B is egy egyenesen vannak, sőt B, E és A is egy egyenesen vannak.

A lemma igazolása A k_1, k körök belső hasonlósági pontja az érintési pontjuk, C. Ebből a pontból a k_1 kör k-ba nagyítható. Ennél a nagyításnál a k_1 kör l_1 érintőjének képe a k kör egy l_1-gyel párhuzamos érintője lesz, ami épp l_2. Így az A érintési pont képe a V érintési pont, tehát eza két pont egy egyenesen van C-vel. Hasonlóan igazolható a másik két ponthármas kollinearitása. Q.E.D.

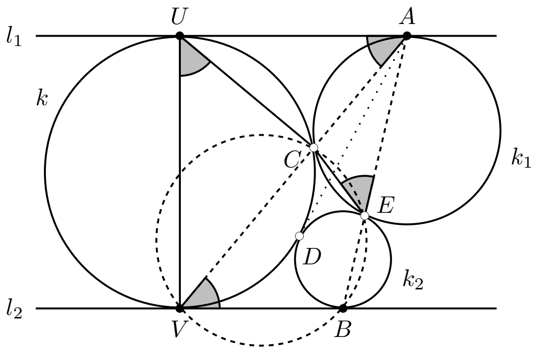
Lemma L.4.2. A feladat ábráján az AD egyenes érinti a k, k_2 köröket.

A lemma igazolása

A k, k_2 körök közös pontbeli közös érintője a két kör hatványvonala, tehát mindössze annyit kell belátnunk, hogy az A pontnak a k, k_2 körökre vonatkozó hatványa egyenlő. Lemma L.4.1. szerint a k kör és az l_2 egyenes V érintési pontja az AC egyenesen van. Az A pont k-ra vonatkozó hatványa $AC \cdot AV$ és ehhez hasonlóan A-nak a k_2-re vonatkozó hatványa $AE \cdot AB$, így azt kell igazolnunk, hogy $AC \cdot AV = AE \cdot AB$, tehát azt, hogy a C, V, B, E pontok egy körön vannak.(Lásd a 2. ábrát!)

A k_1 körben az AC húr kerületi szöge $\alpha = CEA\angle$, míg a húr érintő szárú kerületi szöge $\alpha = CAU\angle$. A $CAU\angle$ szög váltószöge a $CVB\angle$, így $\alpha = CEA\angle = CVB\angle$ tehát $CEBV$ valóban húrnégyszög, a lemmát igazoltuk. Q.E.D.

A lemmából gyorsan következik a feladat állítása. AD érinti k-t és k_2-t és ehhez hasonlóan BC érinti k-t és k_1-et. Ekkor Q rajta van a k, k_1 és a k, k_2 körök közös érintőjén, azaz hatványvonalán is, így Q a k, k_1, k_2 körök hatványpontja. Így rajta van k_1 és k_2 E-n átmenő közös érintőjén is, azaz QE érinti k_1 és k_2 köröket. Ekkor viszont $QC = QE$ és $QD = QE$, mivel a QC, QE egyenesek a k_1 kör, QD, QE



1.33M2.2. ábra.

egyenesek pedig a k_2 kör érintői a Q pontból. Így $QC = QD = QE$, tehát a feladat állítását igazoltuk.

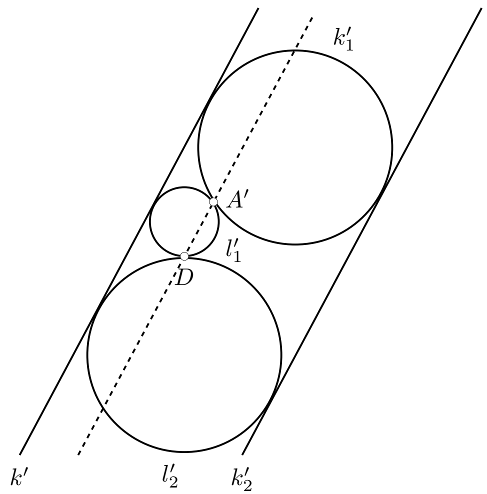
3. megoldás. Az 1.33M2. megoldásban szerepl? Lemma L.4.2-re adunk új bizonyítást. Invertáljuk az ábrát D-re! Ekkor a k és k_2 érintő körök képei a k' és k_2' párhuzamos egyenesek, l_1 és l_2 képei az l_1' és l_2' egymást D-ben érintő körök, k_1 képe k_1' kör, A képe A'. (Lásd a 2. ábrát!)

Ekkor DA' nyilván párhuzamos k'-vel és k_2'-vel. Ezért DA' invertált képe, a DA egyenes is érinti a k, k_2 köröket, ahogy a lemma is állította. Q.E.D.

4. megoldás. Az 1.33M2. megoldásban közölt Lemma L.4.2-re adunk még egy bizonyítást. Tekintsük a k, k_2 körök D-beli közös érintőegyenesének az l_1 egyenessel vett A' metszéspontját. (Azt kell igazolnunk, hogy A' megegyezik A-val.) Invertáljuk az ábrát az A' középpontú D-n átmenő i körre!

Ennél az inverziónál az l_1, k, k_2 alakzatok képe önmaga. Az l_2 egyenes érinti az l_1, k, k_2 alakzatokat, tehát l_2 képe olyan B'-n átmenő kör, amely érinti l_1, k, k_2 mindegyikét. Csak egy olyan kör van– ez szemléletesen „nyilvánvaló”, de alább igazoljuk is–, amely érinti a három alakzatot. A k_1 kör egy ilyen kör, $B' = B$.

Lemma L.4.4. Ha a k kör érinti az egymással párhuzamos l_1, l_2 egyeneseket és a k_2 kör érint l_2-t valamint k-t kívülről, akkor egyetlen egy olyan k_1 kör van, amely



1.33M3.2. ábra.

érinti l_1-et és k-t, valamint k_2-t kívülről.

A Lemma L.4.4. bizonyításának vázlata

A k-t és l_1-et érintő körök középpontjai és a k-t és l_2-t érintő körök középpontjai is egy-egy parabolát alkotnak. Ráadásul ez a két parabola párhuzamos tengelyű, azonos állású és paraméterük (a fókuszuk és a vezéregyenesük távolsága is) egyenlő. Metszéspontjaik számítása egy

$$\left.\begin{array}{rcl} y & = & ax^2 + b_1x + c_1 \\ y & = & ax^2 + b_2x + c_2 \end{array}\right\}$$

alakú egyenletrendszer megoldására vezet, amelynek legfeljebb megoldása van.

1.34.

1. megoldás. Jelölje a k kör e átmérőegyenesére merőleges átmérőt HI, ahol I azon a félkörlapon van, amelybe a köröket írjuk, míg H a másikon. Jelölje továbbá O_k a k kör középpontját r_k pedig a sugarát.

a) Tekintsük a HI átmérőre I-ben állított d merőleges egyenest. Ha O egy olyan r sugarú kör középpontja, amely E-ben érinti e-t és K-ban k-t, akkor a TO egyenes a $T_d = TO \cap d$ pontban merőleges d-re. Mivel

$$O_kO = O_kK - OK = r_k - r \tag{1}$$

és

$$T_dO = T_dT - OT = r_k - r, \tag{2}$$

így $O_kO = T_dO$ azaz O egy olyan parabolán helyezkedik el, amelynek fókusza O_k, vezéregyenese d. Ezen a parabolán vannak a k kör és az e egyenes A, B metszéspontjai is – a k-t és e-t érintő0 sugarú körök középpontjai. A félkörlapon elhelyezkedő körök középpontjai csak a parabola A és B közti ívén helyezkedhetnek el, ott viszont bárhol, hiszen ha ott egy O pontra és e-re, d-re vonatkozó vetületeire teljesülnek az 1, 2 relációk, akkor az érintőkört is könnyen megrajzolhatjuk O köré.

b) Állítjuk, hogy a H pont megfelelő. A k-t és e-t érintő o kör érintse k-t K-ban, e-t E-ben. A K pont az o, k körök hasonlósági pontja, egy K centrumú pozitív arányú nagyítás képezi o-t k-ba. Ennél a nagyításnál az o-kör E-beli érintője, azaz e, a k kör egy olyan érintőjébe megy át, amely e-vel párhuzamos, de e-től nem a K-t tartalmazó félsíkban helyezkedik el, azaz nem d. Az egyetlen ilyen érintő a H-beli érintő, azaz K, E és H valóban egy egyenesen vannak.

c) A k körben a HA húr kerületi szöge 45°:

$$HKA\angle = EKA\angle = 45^\circ,$$

így az AEK háromszög k_{EA} körülírt körében az EA húr kerületi szöge is 45°. Másrészt $HAE\angle = 45^\circ$, tehát AH a k_{EA} kör EA húrjának érintő szárú kerületi szöge, azaz HA érinti ezt a kört. A szelőtétel szerint $HA^2 = HE \cdot H_K$, ahol a HA

független az o körtől, tehát H az összes szóbajövőo kör hatványpontja. így bármelyik két érintkező kör közös pontbeli közös érintője (hatványvonala) átmegy H-n is hossza HA. Az érintési pontok a H középpontú A-n átmenő körön helyezkednek el.

Ha T e kör A és B közti rövidebbik ívének tetszőleges pontja, akkor tekintsük a TH és e egyenesek által határolt, de az e egyenes H-val ellentétes oldalán található két szögtartományt. írjunk ezekbe olyan kört, amely érinti k-t és k belsejében van. Az előzőlevezetés szerint ezek a HT szárat egy-egy H-tól HA távolságra levő pontban, tehát T-ben érintik, azaz egymást is T-ben érintik.

2. megoldás. b) Jelölje k és e metszéspontjait A és B egy megfelelő k-t és e-t érintő kört o, érintési pontjait K és E. Alkalmazzunk A centrumú inverziót! Ennél e és k képe egy-egy olyan egyenes – $e' = e$ és k'–, amely átmegy B képén, a B' ponton. Az e', k' egyenesek négy szögtartományra osztják a síkot, ezek egyike annak a félkörlapnak a képe, amelybe a köröket írjuk. Az o kör képe az adott szögtartományba írt, a szárakat érintő o' kör, érintési pontjai, E' és K' az E, K pontok képei. Az EK egyenes képe az E, K, A pontokon átmenő kör, azt kell igazolni, hogy ez mindig átmegy még egy rögzítet ponton. A szögtartomány szögfelezője, az $E'K'$ szakasz t felezőmerőlegese az o' kör egyik szimmetriatengelye. Az A pont erre tükrözött képe ,A^* illeszkedik az o' körre, és így A^* inverziónál származó (ős)képe, $A^{*\prime}$ illeszkedik o-ra.

c) A t egyenes merőleges o'-re łgy inverziónál származó képe, az A, B pontokon átmenő t' egyenes – az e egyenes és a k kör A-beli és B-beli szögfelező köre – is merőleges o-ra. A t' kör H középpontjának a t'-re merőleges körökre vonatkozó hatványa egyenlő a t' kör sugarának négyzetével. Így H illeszkedik a t-re merőleges körök hatványvonalaira, így az egymást érintő körpárok közös pontbeli közös érintőjére is. A merőlegesség miatt az érintő H-ig tartó része a t' kör sugarával egyezik meg, így az érintési pontok a t' körön vannak.

Könnyedén szerkeszthetünk az e', k' egyenesek határolta megfelelő szögtartományba a t szögfelező tetszőleges pontján átmenő, a szögszárakat érintő kört. A szög csúcsát kivéve mindig két ilyen kör van, amelyek egymást is érintik. Ezek inverz képei egymást a t' körön érintő körök lesznek, tehát t' minden pontja lehet érintési pont.

3. megoldás. b) Alkalmazzunk egy olyan inverziót, amely kicseréli a k kör e egyenesre eső AB átmérőjét a tekintetbe vett félkörlap AB félkörívével!

Van ilyen inverzió, ennek centruma a k kör AB-re merőleges átmérőjének a félkörlappra nem illeszkedő H végpontja. Ha H centrumú inverziót alkalmazunk, akkor k képe egyenes lesz, hiszen H a k körön van, ha olyan inverziót alkalmazunk, amelynél A és B fix, akkor a k kör képe az e egyenes lesz, hiszen ez az egyetlen egyenes A-n és B-n át.

Tekintsünk az AB szakasz valamely E pontját. A HE egyenes metszi a k kör H-t nem tartalmazó AB ívét, jelölje ezt a metszéspontot K. Van egy olyan o kör, amely E-ben érinti e-t és átmegy K-n. Az E, K pontokat a vizsgált inverzió kicseréli egymással, hiszen az e egyenest és a k kört is kicseréli egymással. Emiatt a teljes o kört önmagára képezi az inverzió (lásd az 1.19. feladatot). Ez azt is jelenti, hogy o érinti k-t K-ban, hiszen o érinti e-t E-ben és E képe K, e képe k és az inverzió érintkezéstartó.

Szemléletesen nyilvánvaló, itt nem igazoljuk, hogy egyetlen olyan kör van, amely az e egyenest az AB szakaszának egy rögzített E pontjában érinti és érinti a k kör rögzített AB ívét is. Ezt a kört az előbb meg is szerkesztettük, látható, hogy az érintési pontokat összekötő EK egyenes mindig átmegy a H ponton.

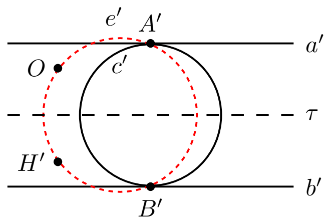
c) Ha az AB szakaszt és a k kör AB ívét érintő o_1, o_2 köröknek egyetlen közös pontja van, akkor az szükségképpen helyben marad a b)-ben vizsgált inverziónál, hiszen o_1 és o_2 is önmagára képződik, így közös pontjuk is egy közös pontjukba képződik. Ez azt jelenti, hogy egyetlen közös pontjuk az inverzió alapkörén, a H középpontú HA sugarú körön van. Ha P ezen kör rövidebbik AB ícének tetszőleges pontja, és o olyan kör, amely P-ben érinti a HP egyenest, akkor o szükségképpen fix a vizsgált inverzoónál. két olyan kör van, jelben o_1 és o_2, amely emellet még e-t is érinti, ezek szükségképpen k-t is érintik, ráadásul egymást is P-ben. Tehát a vizsgált körív minden pontja előáll érintési pontként.

1.35. a) Jelölje a két adott kört a és b, érintési pontjukat O, az őket érintő harmadik kört c. Egy O centrumú inverziónál a és b az egymással párhuzamos a', b' egyenesekbe képződik, c' ezeket érintő kör. A c' körönmagára képződik annál a τ tükrözésnél, amely a'-t és b'-t felcseréli (lásd az 1. ábrát). Az A, B pontok $A' = a' \cap c'$, $B' = b' \cap c'$ képei egymás tükörképei ennél a tükrözésnél.

Az $e = AB$ egyenes képe az A', B' és O pontokon átmenő e' kör, amely szimmetrikus az $A'B'$ húrjának felezőmerőlegesére, tehát a τ tükrözésre. Így e'-re O-val együtt annak $\tau(O) = H'$ képe is elleszkedik.

Ha $H' \not\equiv O$, akkor H' az inverziónál valamely H pont képe, amely illeszkedik az e egyenesre. Ez a H pont tehát bármely a-t és b-t is érintő kör érintési pontjait összekötő egyenesre illeszkedik.

A $H' \equiv O$ speciális eset pontosan akkor következik be, ha O az a', b' párhuzamos egyenesek között féluton helyezkedik el, azaz ha a és b egyenlő sugarú körök. Ebben



1.35M.1. ábra.

az esetben a vizsgált AB egyenesek egymással párhuzamosak.

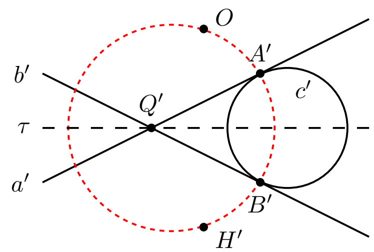
b) Ha az a és b körök az O, Q pontokban metszik egymást, akkor egy O centrumú inverzióval a 2. ábrához jutunk. Most az a', b' egyenesek a Q' pontban metszik egymást. A c' kör egyik szimmetriatengelye az a', b' egyenesek egyik vagy másik szögfelezője. Az A', B', O pontokon áthaladó e' kör is a két szögfelező valamelyikére szimmetrikus, így illeszkedik rá az O pontnak a megfelelő szögfelezőre vonatkozó H' tükörképe is. Így az a) feladatrészben kimondott állítás itt is érvényben marad, de kétféle elhelyezkedésű érintőkör van, az egyikbe tartozók érintési pontjait összekötő egyenes egy bizonyos ponton haladnak át vagy párhuzamosak, a másikba tartozók pedig egy másik ponton haladnak át vagy párhuzamosak.

Ha két közös pont nélküli körből indulunk ki, akkor is teljesül az előző bekezdés végén megfogalmazott állítás. Ha az alapul vett a, b körökre merőleges körök az O, Q pontokon mennek át (lásd az 1.50. feladatot), akkor az O centrumú i inverzió a-t és b-t az egymással koncentrikus a', b' körökbe képezi, közös középpontjuk Q'. Az a-tés b-t is érintő c kör c' képe most a Q' centrumú $\lambda = \pm r'_a r'_b$ paraméterű τ^+, τ^- inverziók egyikére lesz szimmetrikus (lásd a 3. ábrát). Az $e = AB$ egyenes e' képe is invariáns $\tau^\pm$ valamelyikére, így e'-re illeszkedik $\tau^+(O)$ vagy $\tau^-(O)$. Az e egyenes tehát vagy $i(\tau^+(O))$-n vagy $i(\tau^-(O))$-n megy át. (Lásd még az 1.37. és a G.II.8.31. feladatot!)

1.37.

1. megoldás. *Bohus Kinga* (Inverzió, szimmetria)

a) Induljunk ki a kész ábrából (1. ábra). Legyen K és L két metszéspontja A és B és tekintsünk két olyan kört, u_1-t és u_2-t, amelyek érintik K-t és L-t, és amelyek hatványvonala egy e egyenes. Azt kell megmutatnunk, hogy az így létrejövő e egyenesek mind egy közös ponton mennek át. Az állítást csak arra az esetre fogjuk igazolni, ha az u_1, u_2 körök metszők. Ez elégséges lesz, mert ha u_1 és



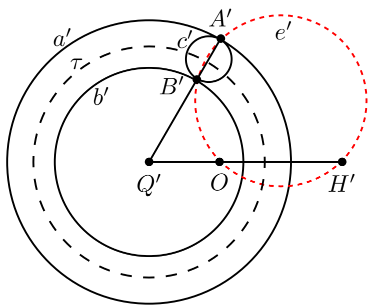
1.35M.2. ábra.

u_2 nem metszők, akkor elkészíthetjük az

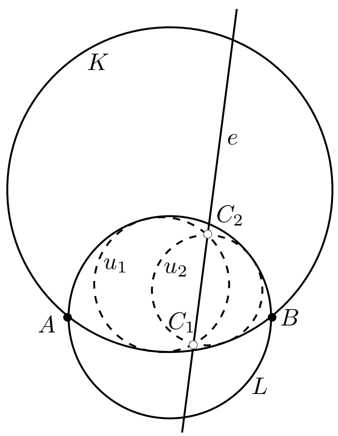
$$u_1 = v_1, \qquad v_2, \qquad v_3, \qquad \dots \qquad v_n = u_2$$

körsorozatot, amelynek egymást követő tagjai metszők és ha az egymást követő körök hatványvonalai egy közös P ponton mennek át, akkor P hatványa u_1-re és u_2-re is egyenlő.

Invertáljuk az ábrát egy A középpontú tetszőleges körre (a 2. ábrán az A középpontú B-n átmenő körre invertáltunk, azaz $B = B'$). A K', L' alakzatok egyenesek,



1.35M.3. ábra.



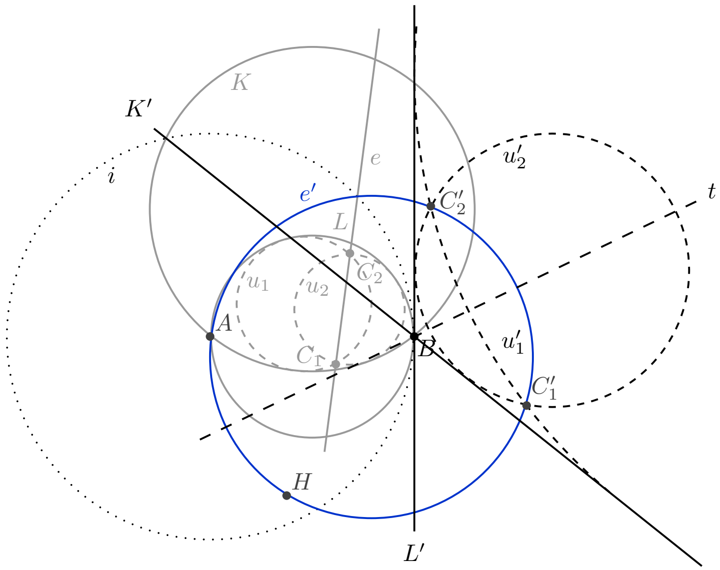
1.37M1.1. ábra.

amelyek a B' pontban metszik egymást. Az u', v' körök a K', L' egyeneseket az egyik tartományban érintő körök. A K' és L' egyenesekből és az u', v' körökből álló rendszer tengelyesen szimmetrikus a K' és L' egyenesek azon tartományban haladó t szögfelezőjére, amelyben u' és v' is van.

Az u, v körök e hatványvonala olyan e' körbe transzformálódik, amely átmegy az u és v körök C_1, C_2 metszéspontjainak C_1', C_2' képein és az inverzió A centrumán. Mivel C_1' és C_2' a t tengelyre szimmetrikus u_1', u_2' körök metszéspontjai, így ők is szimmetrikusan helyezkednek el t-re, azaz t a $C_1'C_2'$ szakasz felezőmerőlegese. Így e' is szimmetrikus t-re, A-val együtt az A pont t-re vonatkozó H tükörképe is rajta van e'. Ez azt jelenti, hogy a H pontnak az inverziónál származó képe (azaz őse) illeszkedik e-re.

2. megoldás. *Keresztfalvi Tibor* (Inverzió, körök szöge)

a) Legyen a K és L által meghatározott egyik (vagy két szemközti) tartományba eső és K-t és L-t is érintő körök halmaza $\mathcal{H}$. Ha létezik a feladat feltételeinek megfelelő O pont, és hatványa a $\mathcal{H}$-beli körökre a nemnegatív r^2 szám, akkor az O középpontú r sugarú h kör mindegyik $\mathcal{H}$-beli körre merőleges. Megfordítva, ha találunk olyan kört, amely a $\mathcal{H}$ mindegyik körére merőleges, akkor annak O középpontjának $\mathcal{H}$ bármelyik körére vonatkozó hatványa ugyanaz a pozitív szám.



1.37M1.2. ábra.

Az inverzió szögtartó. Ha az 1.37M1. megoldás mintájára invertáljuk az ábrát, akkor maga a t tengely az az alakzat, amely a K'-t és L'-t érintő mindegyik körre merőleges. Ha t-t visszainvertáljuk, akkor megkapjuk a h kört, annak középpontja lesz a keresett pont.

Megjegyezzük, hogy mivel t felezi K' és L' szögét, így a h kör is felezi L és K szögét (és átmegy azok két metszéspontján).

3. megoldás. *Tomon István ötlete alapján* (Hasonlósági középpont, Steiner hatvány)

a)-b) Ebben a megoldásban nem használunk inverziót, nem tételezzük fel, hogy a K, L körök metszik egymást. Három másutt is hasznos lemmára építkezünk. Meg fogjuk mutatni, hogy a keresett pont a K, L körök egyik hasonlósági középpontja.

Lemma I.: ha K és L különböző sugarú körök, akkor két olyan középpontos nagyítás is van, amely K-t L-be képezi. E két nagyítás arányának abszolútértéke egyenlő (a két kör sugarának aránya), előjele ellentétes.

Megjegyzés: ha a két kör egyenlő sugarú, akkor az egyik nagyítás (a pozitív arányú) eltolássá fajul.

Emlékeztetünk rá, hogy az egyik kört a másikba képező pozitív arányú középpontos nagyítás centrumát a két kör *külső hasonlósági pontjának* nevezzük, míg a negatív arányú nagyítás centruma a *belső hasonlósági pont*.

Lemma II. (két kör Steiner hatványa): a K, L körökhöz és azok H hasonlósági középpontjához hozzárendelhető egy Λ szám a következő tulajdonsággal: ha a H pontot tartalmazó tetszőleges h egyenesen a K, L körök U_K, V_K pontja a K-t L-re képező H centrumú nagyításnál *nem* egymásnak megfelelő pontpár, akkor $HU_K \cdot HU_L = \Lambda$. (Lásd a G.II.11.30. feladatot!)

Lemma III. Az O_1 középpontú λ_1 arányú és az O_2 középponttú λ_2 arányú középpontos nagyítások kompozíciója $\lambda_1\lambda_2 \neq 1$ és $O_1 \neq O_2$ esetén olyan $\lambda_1\lambda_2$ arányú középpontos nagyítás, melynek O_3 centruma az O_1O_2 egyenesen van. (Lásd a G.II.8.26., G.II.8.27., G.II.8.28. feladatokat!)

Következzék a feladat megoldása. Érintse az u kör az adott K-t az U_K, az L kört az U_L pontban. Állítjuk hogy a K, L körök hasonlósági pontjainak egyike illeszkedik az U_LU_K egyenesre. Valóban, egy megfelelő arányú U_K centrumú középpontos nagyítás a K kört u-ra képezi, míg egy U_L középpontú nagyítás u-t L-be viszi. E két középpontos nagyítás kompozíciója K-t L-re képezi, így centruma a K, L körök egyik hasonlósági pontja, ami tehát Lemma III. szerint az U_KU_L egyenesen van.

A nagyítások előjeleit is figyelembe véve állíthatjuk, hogy amennyiben K és u a közös U_K pontjukba vont közös érintőjük különböző oldalán vannak és u és L is az U_L beli érintőjük különböző oldalán van, vagy mindkét esetben az érintő azonos oldalán van a két kör, akkor az U_KU_L egyenes a K, L körök külső hasonlósági pontján megy át, míg ha az egyik körpár közös érintője elválasztja a két kört, a másik körpáré pedig nem, akkor U_KU_L a K, L körök belső hasonlósági pontján megy át.

Ha az L kör U_L-beli érintője és a K kör U_K-beli érintője nem párhuzamos, akkor U_L nem az U_K pont képe annál a középpontos nagyításnál, amelynek H centruma a K, L körök U_KU_L-re illeszkedő H hasonlósági pontja. Ebben az esetben Lemma II. alapján készen is vagyunk a feladat állításának bizonyításával, hiszen a K, L körök H hasonlósági ponthoz tartozó Steiner hatványa a H pont u-ra vonatkozó hatványa.

Az L kör U_L-beli érintője és a K kör U_K-beli érintője párhuzamos, akkor az U_KU_L egyenes az U, K, L körök mindegyikének átmérőegyenese, ezen az egyenesen mindkét hasonlósági pont rajta van. Az egyikhez tartozó hasonlóságnál U_K és U_L nem egymásnak megfelelő pontpár, így alkalmazható az előző gondolatmenet.

1.40. Előzetes megjegyzés: Két kör szögén az egyik metszéspontjukban vont érintőjük szögének abszolút értékét értjük. Egyenes és kör szöge az egyenes és a két alakzat egyik metszéspontjában a körhöz húzott érintő szögének abszolút értéke. A szög értéke – így hogy abszolút értéket veszünk – független a metszéspont választásától (lásd az 1.39. feladatot). Ha a két alakzat érinti egymást, akkor szögük 0. Ha két alakzatnak nincs közös pontja, akkor szögüket – egyelőre – nem értelmezzük.

a) Először azt igazoljuk, hogy két egyenes szöge megegyezik képeik szögével.

Ha a két egyenes e és f, az inverzió középpontja O, akkor az e egyenes képe olyan e' kör, amely átmegy az O ponton és ott az e-vel párhuzamos e_O egyenes érinti vagy pedig e' maga az e_O egyenes. Ehhez hasonlóan, ha f_O az O-t tartalmazó f-fel egyállású egyenes, akkor f képe, f' vagy f_O vagy egy azt O-ban érintő kör. Az e', f' alakzatok szöge tehát az O metszéspontjukon áthaladó e_O, f_O egyenesek szöge, ez pedig megegyezik e és f szögével.

b) Vizsgáljuk most a k_e, k_f alakzatokat (köröket vagy egyeneseket, röviden: kögyeneseket), amelyeknek van egy O-tól különböző A metszéspontja. Jelölje A-beli érintőjüket e és f, a kögyenesek inverziónál származó képét k'_e, k'_f, illetve e', f'. Az 1.38. feladat állítása szerint k'_e és e' illetve k'_f és f' is érinti egymást, így k'_e és k'_f szöge, amit az A' metszéspontjukban mérünk, megegyezik e' és f' szögével, ami az előző paragrafus szerint e és f szögével, azaz k_e és k_f szögével is egyenlő.

Végül, ha a k_e, k_f kögyenesek egyetlen közös pontja az inverzió O centruma, akkor ott érintik egymást, így az 1.38. feladat adja a bizonyítást.

1.42.

1. megoldás. Az állítás ebben az általános formában nem igaz. Az 1. ábrán a k_1, k_2, k_3, k_4 körnégyes ciklikusan érinti egymást a P_{12}, P_{23}, P_{34}, P_{41} pontokban, amelyek valóban egy körön vannak, de a a k_1, k_2, k_3, k'_4 körnégyes is ciklikusan érinti egymást, ahol a P_{12}, P_{23}, P'_{34}, P'_{41} érintési pontok nyilvánvalóan nincsenek egy körön.

A különbség a következő: az 1. ábrán a k_1, k_2, k_3, k_4 köröket tudjuk úgy irányítani, hogy az érintési pontjaikban a találkozó körök irányítása megegyezzen. Megfelel pld., ha a k_1, k_2 köröknek pozitív, k_2-nek és k_4-nek pedig negatív forgásirányt adunk. A k_1, k_2, k_3, k_4' köröket viszont nem tudjuk így irányítani: ha például a k_1 és k_3 pozitív, k_2 pedig negatív forgásirányt kap, akkor a k_4' kör pozitív irányítással érintené a k_1 irányított kört, de irányítottan nem érintené k_3-at, míg a negatív irányítású k_4' kör a k_1-et nem érintené, de érintené k_3-at.

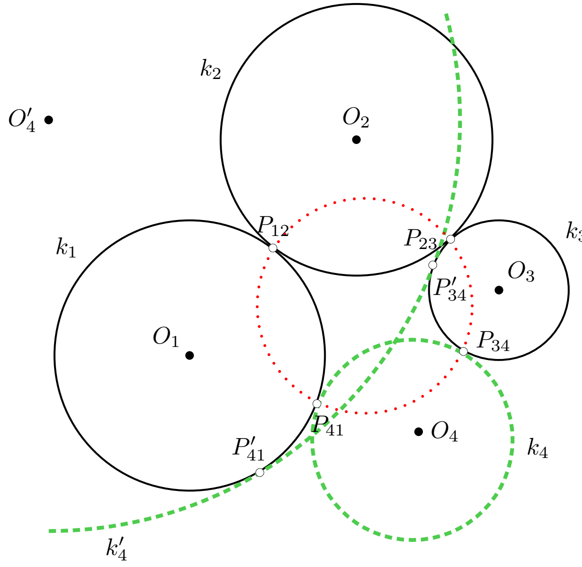
Az 1.42M2. megoldásban az irányítással megfogalmazott általánosabb tételt igazolunk, most egyszer?bb eszközök használatával az alábbi módosított állítást tekintjük:

Lemma Ha a k_1, k_2, k_3, k_4 körök kölcsönösen egymás külsejében helyezkednek el és ciklikus sorrendben érintik egymást, akkor a P_{12}, P_{23}, P_{34}, P_{41} érintési pontok egy körön vannak.

Bizonyítás

Jelölje a k_i kör középpontját O_i, a $P_{41}O_1P_{12}$, $P_{12}O_2P_{23}$, $P_{23}O_3P_{34}$, $P_{34}O_4P_{41}$ egyenlő szárú háromszögek alapon fekvő szögét rendre α_1, α_2, α_3 és α_4.

Azt kell igazolnunk, hogy a $P_{12}P_{23}P_{34}P_{41}$ négyszög húrnégyszög, tehát azt, hogy



1.42M1.1. ábra.

ebben a négyszögben a szemköztes szögek összege egyenlő:

$$P_{12}P_{23}P_{34}\angle + P_{34}P_{41}P_{12}\angle = P_{23}P_{34}P_{41}\angle + P_{41}P_{12}P_{23}\angle.$$

Ugyanez az α_i szögekkel kifejezve (lásd a 2. ábrát):

$$(180^\circ - \alpha_2 - \alpha_3) + (180^\circ - \alpha_4 - \alpha_4) = (180^\circ - \alpha_3 - \alpha_4) + (180^\circ - \alpha_1 - \alpha_2),$$

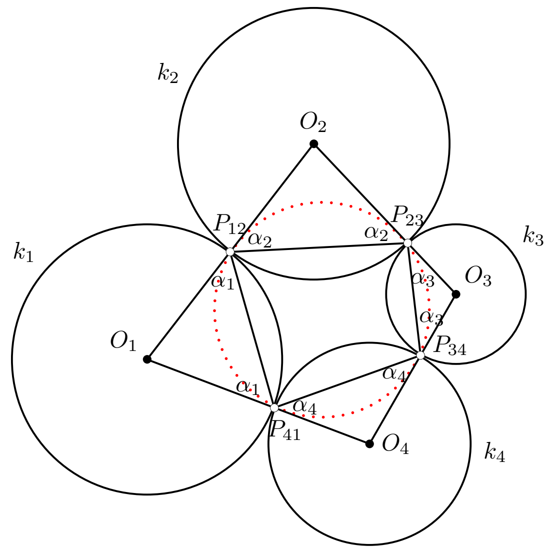
ami nyilvánvalóan igaz.

2. megoldás. Az eredeti állítás nem igaz (lásd pld az 1.42M1. megoldást. Helyette az alábbi összefüggést igazoljuk:

Lemma Ha a k_1, k_2, k_3, k_4 *irányított* körök ciklikus sorrendben érintik egymást, akkor a P_{12}, P_{23}, P_{34}, P_{41} érintési pontok egy körön vagy egyenesen vannak.

Bizonyítás

Alkalmazzunk P_{12} centrumú inverziót! Ennél k_1 és k_2 képe két egymással párhuzamos egyenes lesz és rajtuk az irányítás is egyforma lesz. Az 1. ábrán látható az inverzió utáni kép, ahol a k_2, k_3 irányított körök illetve a P_{23}, P_{34}, P_{41} pontok képeit ugyanazzal a jellel, de vesszővel ellátva tüntettük fel.



1.42M1.2. ábra.

A k_3', k_4' körök egyik (az irányításnak is megfelelő) hasonlósági pontja a P_{34}' érintési pont. Ha innen a k_4' kört a k_3' körbe nagyítjuk, akkor a k_4' kör valamely érintője a k_3' kör ugyanazzal párhuzamos és azonos irányítású érintőjébe képződik. Mivel adott irányú és irányítású érintője egy irányított körnek csak egy van, így a k_1' irányított egyenes képe a k_2' irányított egyenes, tehát a P_{41}' érintési pont képe a P_{23}' érintési pont. Ez azt jelenti, hogy a P_{41}', P_{34}', P_{23}' pontok egy egyenesen vannak, ami azzal egyenértékű, hogy a P_{12} centrumú inverzióra vonatkozó P_{41}, P_{34}, P_{23} ősképeik egy körön vagy egyenesen vannak a P_{12} centrummal.

3. megoldás. Az alábbi gondolatmenetet az 1.37. feladat eredményére és annak 1.37M3. megoldásában foglaltakra építjük.

A k_1, k_3 körök hasonlósági pontjai legyenek H_1 és H_2, a két kör Steiner hatványa a H_1-re vonatkoztatva h_1, a H_2-re vonatkoztatva H_2 (lásd az 1.37M3. megoldást vagy a G.II.11.30. feladatot).

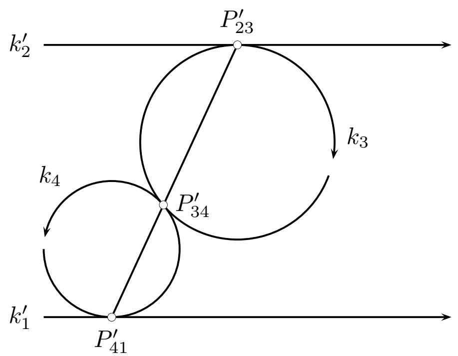
Tekintsük a k_1 és k_3 köröket és a mindkettőjüket érintő körök $\mathcal{K}$ halmazát. Ha $k \in \mathcal{K}$ és k a Q_1-ben érinti k_1-et míg Q_2-ben k_2-t, akkor 1.37M3. szerint a Q_1Q_2 egyenes átmegy H_1-an vagy H_2-n. A $\mathcal{K}$ halmazt ennek alapján két „osztályra" $\mathcal{K}_1$-re és $\mathcal{K}_2$-re bonthatjuk fel aszerint, hogy az érintési pontok összekötő egyenese H_1-en vagy H_2-n megy át. A két osztály közös elemei a k_1 és a k_2 körök azon közös érintő körei, amelyek középpontja e két kör centrálisán van.

Ha k_2 és k_4 is $\mathcal{K}_1$-ben van, akkor a k_1, k_3 körök H_1-hez kapcsolódó Steiner hatványa:

$$h_1 = H_1P_{12} \cdot H_1P_{23} = H_1P_{41} \cdot H_1P_{12},$$

így a szelőtétel megfordítása szerint (lásd a G.II.11.17. feladatot) a P_{12}, P_{23}, P_{34}, P_{41} pontok egy körön vannak, ha nincsenek egy egyenesen.

Hasonló a helyzet akkor is, ha k_2 és k_4 is $\mathcal{K}_2$-ben van. Ha azonban különböző osztályban van k_2 és k_4, akkor nem feltétlenül vannak egy körön az érintési pontok.



1.42M2.1. ábra.

1.43. Alkalmazzunk P_{12} centrumú inverziót! A k_1, k_2 körök k_1', k_2' képei az egymást a Q_{12} pont Q_{12}' képében metsző egyenesek lesznek és egyenes lesz a P_{12}, P_{23}, P_{34}, P_{41} pontok p kögyenesének p' képe is. A k_2, k_3 körök képei körök a további metszéspontok képei pontok, ezeket eredeti elnevezésükből egy vesszővel kapjuk (lásd az 1. ábrát).

Irányított szögekkel modulo 180° számolunk. A k_3' körben

$$Q_{23}'Q_{34}'P_{34}'\sphericalangle \equiv Q_{23}'P_{23}'P_{34}'\sphericalangle \pmod{180^\circ}, \tag{1}$$

és

$$Q_{23}'P_{23}'P_{34}'\sphericalangle \equiv Q_{12}'P_{23}'P_{41}'\sphericalangle \pmod{180^\circ}, \tag{2}$$

míg a k_4' körben

$$P_{34}'Q_{34}'Q_{41}'\sphericalangle \equiv P_{34}'P_{41}'Q_{41}'\sphericalangle \pmod{180^\circ}, \tag{3}$$

ahol

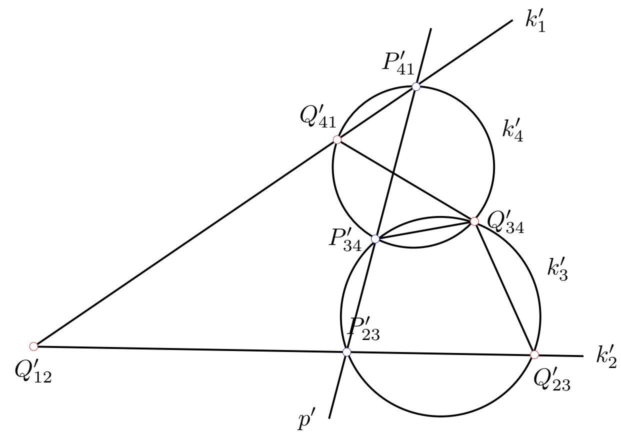
$$P_{34}'P_{41}'Q_{41}'\sphericalangle \equiv P_{23}'P_{41}'Q_{12}'\sphericalangle \pmod{180^\circ}. \tag{4}$$

(1) és (3) összegéből (2) és (4) figyelembevételével adódik, hogy

$$Q_{23}'Q_{34}'Q_{41}'\sphericalangle \equiv Q_{12}'P_{23}'P_{41}'\sphericalangle + P_{23}'P_{41}'Q_{12}'\sphericalangle \pmod{180^\circ}, \tag{5}$$

Másrészt a A $Q_{12}'P_{23}'P_{41}'$ háromszögben

$$P_{23}'Q_{12}'P_{41}'\sphericalangle \equiv Q_{12}'P_{23}'P_{41}'\sphericalangle + P_{23}'P_{41}'Q_{12}'\sphericalangle \pmod{180^\circ}, \tag{6}$$



1.43M.1. ábra.

így (7) és (6) összevetéséből kapjuk, hogy

$$Q'_{23}Q'_{34}Q'_{41}\sphericalangle \equiv Q'_{23}Q'_{12}Q'_{41}\sphericalangle \pmod{180^\circ}, \tag{7}$$

azaz a Q'_{34}, Q'_{12} pontok a Q'_{23}, Q'_{41} pontok azonos látókörén vannak vagy a négy pont egy egyenesre illeszkedik. Ebből adódik, hogy inverziós ősképeik – Q_{34}, Q_{12} és Q_{23} valamint Q_{41} – is egy kögyenesen vannak.

1.45.

1. megoldás. a) Lásd a G.II.11.31. feladat megoldását!

2. megoldás. a)-b) Jelölje a háromszög csúcsait A, B és C, a beírt (vagy a hozzáírt) kör érintési pontjait T_A, T_B és T_C, a beírt (vagy hozzáírt) kört illetve középpontját i illetve I, a körülírt kört illetve középpontját k illetve O.

Alkalmazzunk i-re vonatkozó inverziót! Az A pont képe az 1.1. feladat **??**. megoldásának II. pontja szerint a T_BT_C szakasz F_A felez?pontja. Hasonlóan kapható a B és a C pont képe és így a k kör k' képe a $T_AT_BT_C$ háromszög Feuerbach-körének adódik. Ismeretes, hogy a Feuerbach kör sugara a körülírt – a $T_AT_BT_C$ háromszög köré írt – kör sugarának fele, azaz k képének sugara $\frac{r}{2}$. Alkalmazzuk az 1.13. feladat eredményét! A sugár transzformációjának képlete szerint $\frac{r}{2} = \frac{r^2R}{|d^2-R^2|}$, azaz

$$\left|d^2 - R^2\right| = 2rR. \tag{1}$$

A beírt kör a körülírt körön belül van, azaz $d < R$, és a képlet ilyenkor:

$$R^2 - d^2 = 2rR, \tag{2}$$

míg a hozzáírt kör középpontja kívül van a körülírt körön, tehát $d > R$, azaz

$$d^2 - R^2 = 2rR. \tag{3}$$

c) Használjuk fel a G.II.8.14. feladat b) részének eredményét! Kapjuk, hogy a feltétel:

$$(R-d)\cdot\left[(R^2-d^2)^2 - 2r^2(R^2+d^2)\right] = 0.$$

1.46.

1. megoldás. Invertáljuk az ábrát egy tetszőleges A középpontú körre!

A K kör képe egy K' kör lesz, a K átmérőegyeneseinek képei a K kör O középpontjának O' képén és A-n átmenő körök, az A-n és K egy e átmérőjének végpontjain átmenő l körnek a képe egy olyan egyenes, amely átmegy l' és K' két metszéspontján. Végülis azt kell igazolnunk, hogy van egy olyan pont, amely illeszkedik az A-n és O'-n átmenő bármelyik kör – mint az előbbi l' – és a K' kör hatványvonalára.

Az A-n és O'-n átmenő körök közös hatványvonala az AO' egyenes, tehát annak a Q pontnak, amelyben l' és K' hatványvonala metszi AO'-t, a hatványa mindegyik A-n és O'-n átmenő körre és K'-re is egyforma, tehát rajta van ezek közül bármelyik kettő hatványvonalán.

2. megoldás. Tekintsünk egy A-n átmenő l kört, amely K-t a PQ átmérő végpontjaiban metszi. Legyen l-nek a k körre való invertáltja l_i, ugyanakkor az l körnek a K-kör O középpontjára tükrözött képe l_O.

Állítjuk, hogy az l_i, l_O körök megegyeznek egymással. Ez azonnal nyilvánvalóvá válik, ha a P, Q pontoknál megvizsgáluk K és l valamint K és l_i illetve K és l_O szögét. K és l szöge P-nél és Q-nál abszolútértékben megegyezik, de irányítása szerint ellentétes. A középpontos tükrözés kicseréli P-t és Q-t és a szögeket irányítás szerint megtartja. Az inverzió helybenhagyja P-t és Q-t is és a szögeket megtartja, de megfordítja az irányításukat. Végeredményképp l_i és l_O olyan P-n és Q-n átmenő körök, amelyek P-nél és Q-nál egymással egyenlő irányított szögben hajlanak K-hoz, tehát tényleg megegyeznek egymással.

Ilymódom, ha invertáljuk A-t K-ra, majd a kapott képet tükrözzük O-ra, akkotr visszajutunk l-re, tehát az így kapott pont mindegyik olyan körre illeszkedik, amely átmegy A-n és K-t egy átmérő két végpontjában metszi.

Röviden: az az O centrumú *negatív arányű* inverzió, amely K-t önmagára képezi (a K-n középpontos tükrözésként hat) szükségképpen fixálja azokat a köröket is, amelyek K-t egy átmérő végpontjaiban metszik, így ha az A pont rajta van egy ilyen körön, akkor az inverziónál származó képe is rajta van.

3. megoldás. Ha r a K kör sugara, akkor a K kör O középpontjának a vizsgált körök bármelyikére vonatkozó hatványára a $-r^2$ érték adódik, ha a hatványt a vizsgált kör azon húrján számoljuk, amely K átmérője. A szelőtétel szerint a hatvány értéke ugyanekkora lesz az A-t tartalmazó húron is, tehát

$$PA' = \frac{r^2}{PA},$$

ahol A' a vizsgált kör AO szelőjének A tól különböző és az előjelek szerint O-tól A-val ellenkező irányban található pontja. Ezek szerint illeszkedik a A' a vizsgált körök mindegyikére.

Megjegyezzük, hogy a körök A-tól különböző A' metszéspontja az A pont képe az O középpontú $-r^2$ paraméterű inverziónál. Ennél az inverziónál a vizsgált körök mindegyike fix.

1.47. Az a feltétel, hogy a K-ra vonatkozó inverzió kicseréli egymással A-t és B-t úgy is fogalmazható (lásd az 1.19. feladatot), hogy az A-n és B-n átmenő kögyeensek merőlegesek K-ra. Az I-re vonatkozó inverzió kögyenestartó, tehát az A, B pontokon átmenő kögyenesek képei A', B'-n átmenő kögyenesek. Az inverzió szögtartó is, tehát a K' kör merőleges az A', B' pontokon átmenő kögyenesekre.

De újfent az 1.19. feladat állítása szerint ez azt jelenti, hogy A' és B' egymás képei a K' körre vonatkozó inverziónál.

A fenti gondolatmenetből az is kiderül, hogy ha K képe a K' *egyenes*, akkor A' és B' egymás tükörképei erre az egyenesre. Tehát inverzióval átvihetjük az inverziót tengelyes tükrözésbe.

1.48. Használjuk fel az 1.47. feladat eredményét, különösen annak 1.47M. megoldása végén tett megjegyzést. Vizsgáljuk a t tengelyre vonatkozó tengelyes tükrözést. Tekintsünk egy olyan i inverziót, melynek centruma nem illeszkedik t-re és jelölje t képét az i inverziónál τ. A τ-ra vonatozó inverziónál pontosan akkor felel meg egymásnak az A és a B pont, ha ezen pontok i-nél származó A', B' képei egymásnak felelnek meg a t egyenesre való tükrözésnél. Ez épp azt jelenti, hogy $\tau \circ i \circ \tau$ összetett transzformáció – ahol most egyszerre használjuk a τ jelet a körre és a rá vonatkozó inverzióra – a t-re való tükrözéssel azonos.

$$t(A') = B', \quad \text{és} \quad \tau \circ i \circ \tau(A') = \tau \circ i(A) = \tau(B) = B'.$$

1.50.

1. megoldás. Az A, B pontok akkor és csakis akkor cserélődnek ki a k körre vonatkozó inverziónál, ha az A-n és B-n átmenő kögyenesek merőlegesek k-ra (lásd az 1.19. feladat E pontját). Keressük meg tehát a k_1-re és a k_2-re merőleges kögyeneseket!

Az egyik ilyen kögyenes a k_1, k_2 egyenes közös centrálisa, t. Megjegyezzük, hogy t nem létezik, ha k_1 és k_2 koncentrikus, de ilyenkor olyan valóságos pontpár sincs, amely mindkét körre vonatkozó inverziónál kicserélődik, csak a közös centrum és a „végtelen távoli pont” cserélődik fel.

Keressünk egy mindkét körre merőleges kört is! Ehhez tekintsük a k_1, k_2 körök h hatványvonalát. Messe a hatvábyvonal a t centrálist T-ben tekintsük h egy – k_1 és k_2 külsejében található – H pontját. Mivel H a k_1, k_2 körök külsejében helyezkedik el, így H-nak a két körre vonatkozó egyenlő hatványa pozitív – jelben r_H^2 –, azaz van egy olyan H középpontú k_H kör, amely merőleges k_1-re és k_2-re is.

A keresett pontpár a k_H kör és a t egyenes két metszéspontja. De van-e két metszéspont? Ha k_1 sugara r_1, középpontja O_1, akkor $r_H^2 = HO_1^2 - r_1^2$, míg $HT^2 = HO_1^2 - O_1T^2$. Pontosan akkor van két metszéspont, ha $r_H^2 > HT^2$, azaz ha $r_1^2 < O_1T^2$, tehát ha a hatványvonal centrálisra illeszkedő pontja a k_1 körön kívül van. Ez épp azt jelenti, hogy a k_1, k_2 körök hatványvonalának nincs közös pontja a két körrel, azaz azoknak sem egymással. Ebben az esetben van a feladat feltételeinek megfelelő pontpár, amelyet fent meg is leltünk.

2. megoldás. Ha A és B kicserélődik a k_1 és a k_2 körökre vonatkozó inverziónál, akkor k_1 és k_2 is az A, B pontpár egy-egy Apollóniusz köre (lásd az 1.18. feladatot), tehát k_1 és k_2 közös pont nélküli nem koncentrikus körök.

k_1 és k_2 is az A, B pontpár egy-egy Apollóniusz köre (lásd az 1.18. feladatot), tehát k_1 és k_2 közös pont nélküli nem koncentrikus körök. Megmutatjuk, hogy ha a k_1 és k_2 közös pont nélküli nem koncentrikus körök, akkor van megfelelő pontpár, és alább meg is határozzuk azokat.

Ha $A(a_1, a_2)$, $B(b_1, b_2)$ és k_1 illetve k_2 az A, B pontok λ_1 illetve λ_2 arányú Apollóniusz köre, akkor A, B, k_1 és k_2 egyenletei:

$$\begin{aligned} A: &\quad (x-a_1)^2 + (y-a_2)^2 = 0, \\ B: &\quad (x-b_1)^2 + (y-b_2)^2 = 0, \end{aligned} \tag{1}$$

$$\begin{aligned} k_1: &\quad \lambda_1\big((x-a_1)^2 + (y-a_2)^2\big) - \big((x-b_1)^2 + (y-b_2)^2\big) = 0, \\ k_2: &\quad \lambda_2\big((x-a_1)^2 + (y-a_2)^2\big) - \big((x-b_1)^2 + (y-b_2)^2\big) = 0, \end{aligned} \tag{2}$$

tehát A és B (1) egyenleteinek lineáris kombinációiból kaphatók k_1 és k_2 egyenletei. De k_1 és k_2 (3) egyenleteinek lineáris kombinációiból is megkaphatók A és B „egyenletei”, azaz az A, B pontok koordinátái. Valóban, fent

$$A = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2}k_1 - \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2}k_2, \qquad B = \frac{\lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2}k_1 - \frac{\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_2}k_2.$$

Most k_1 és k_2 adottak, egyenleteik legyenek

$$\begin{aligned} k_1: &\quad x^2 + y^2 - 2\xi_1 x - 2\eta_1 y + \delta_1 = 0, \\ k_2: &\quad x^2 + y^2 - 2\xi_2 x - 2\eta_2 y + \delta_2 = 0. \end{aligned} \tag{3}$$

Úgy kell lineárkombinálnunk ezeket az egyenleteket, hogy 0 sugarú köröket, azaz pontokat kapjunk. Tekintsük pld az $\alpha k_1 + k_2$ kört, tehát azt, melynek egyenlete

$$\alpha k_1 + k_2: \quad x^2 + y^2 - 2\frac{\alpha\xi_1 + \xi_2}{\alpha + 1}x - 2\frac{\alpha\eta_1 + \eta_2}{\alpha + 1}y + \frac{\alpha\delta_1 + \delta_2}{\alpha + 1} = 0. \tag{4}$$

Ugyanez teljes négyzetek összegére írva:

$$\left(x - \frac{\alpha\xi_1 + \xi_2}{\alpha + 1}\right)^2 + \left(y - \frac{\alpha\eta_1 + \eta_2}{\alpha + 1}\right)^2 = \left(\frac{\alpha\xi_1 + \xi_2}{\alpha + 1}\right)^2 + \left(\frac{\alpha\eta_1 + \eta_2}{\alpha + 1}\right)^2 - \frac{\alpha\delta_1 + \delta_2}{\alpha + 1}, \tag{5}$$

ami akkor lesz pont, tehát 0 sugarú kör egyenlete, ha

$$0 = (\alpha\xi_1 + \xi_2)^2 + (\alpha\eta_1 + \eta_2)^2 - (\alpha\delta_1 + \delta_2)(\alpha + 1), \tag{6}$$

A 6. egyenletben adott ξ_1, ξ_2, η_1, η_2, δ_1, δ_2 és α-t keressük. Egyenletünk az α változóban másodfokú:

$$0 = (\xi_1^2 + \eta_1^2 - \delta_1)\alpha^2 + (2\xi_1\xi_2 + 2\eta_1\eta_2 - \delta_1 - \delta_2)\alpha + (\xi_2^2 + \eta_2^2 - \delta_2) \tag{7}$$

és pontosan akkor van két megoldása, ha a

$$D = (2\xi_1\xi_2 + 2\eta_1\eta_2 - \delta_1 - \delta_2)^2 - 4(\xi_1^2 + \eta_1^2 - \delta_1)(\xi_2^2 + \eta_2^2 - \delta_2) \tag{8}$$

mennyiség, azaz

$$D = 4(\xi_1\eta_2 - \xi_2\eta_1)^2 + (\delta_1 - \delta_2)^2 \tag{9}$$

pozitív.

xxx XXX FOLYTATÁS?

3. megoldás. Világos, hogy az egymással kicserélődő A, B pontokat a k_1, k_2 körök t centrálisán kell keresni. Tekintsük t-t számegyenesnek, amelyet k_1 a p_1, p_2, míg k_2 a q_1, q_2 számoknak megfelelő pontokban metsz, míg A-nak és B-nek az x_1 és az x_2 szám felel meg. Az inverziós feltételek:

$$\begin{aligned}\left(x_1 - \tfrac{p_1+p_2}{2}\right)\left(x_2 - \tfrac{p_1+p_2}{2}\right) &= \left(\tfrac{p_1-p_2}{2}\right),\\ \left(x_1 - \tfrac{q_1+q_2}{2}\right)\left(x_2 - \tfrac{q_1+q_2}{2}\right) &= \left(\tfrac{q_1-q_2}{2}\right).\end{aligned} \tag{1}$$

Ezekből

$$\begin{aligned}x_1 + x_2 &= 2\tfrac{q_1q_2-p_1p_2}{q_1+q_2-p_1-p_2},\\ x_1x_2 &= \tfrac{p_1q_1q_2+p_2q_1q_2-p_1p_2q_1-p_1p_2q_2}{q_1+q_2-p_1-p_2},\end{aligned} \tag{2}$$

azaz

$$x_{1,2} = \frac{q_1q_2 - p_1p_2 \pm \sqrt{D}}{q_1 + q_2 - p_1 - p_2}, \tag{3}$$

ahol

$$D = (p_1 - q_1)(p_1 - q_2)(p_2 - q_1)(p_2 - q_2). \tag{4}$$

A D diszkrimináns pontosan akkor pozitív, ha a (p_1, p_2) számpár elválasztja a (q_1, q_2) számpárt, azaz q_1 és q_2 egyike a p_1 és a p_2 között van, a másik pedig nincs a kettő között és nem is egyenlő velük. Ez épp azt jelenti, hogy a k_1, k_2 körök nem metszik egymást. Ebben az esetben (3) adja meg az A, B pontok helyét.

1.52. a Ha a k_1, k_2 körök sugarai r_1 és r_2, akkor a körlánc tagjainak középpontjai egy $R = \frac{r_1+r_2}{2}$ sugarú körön vannak, és a körlánc tagjai $\rho = \frac{|r_1-r_2|}{2}$ sugarú körök (lásd a 2. ábrát). A koncentrikus körök A középpontjai, a körlánc két szomszédos tagjának O_1, O_2 középpontja egy olyan egyenlő szárú háromszöget alkot, amelyben az alap T felezőpontja az körlánc tagjainak érintési pontja és amelyben

$$O_1AT\angle = \frac{180^\circ}{8} = 22{,}5^\circ, \qquad ATO_1\angle = 90^\circ, \qquad TO_1 = \rho = \frac{|r_1 - r_2|}{2}, \qquad AO_1 = R = \frac{r_1 + r_2}{2}, \tag{1}$$

tehát

$$\sin 22{,}5^\circ = \frac{\frac{|r_1-r_2|}{2}}{\frac{r_1+r_2}{2}} \quad\Longrightarrow\quad ,\sin 22{,}5^\circ = \frac{\left|\frac{r_1}{r_2} - 1\right|}{\frac{r_1}{r_2} + 1}, \tag{2}$$

amiből

$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{1 + \sin 22{,}5^\circ}{1 - \sin 22{,}5^\circ}. \tag{3}$$

b) Az ATO_1 derékszögű háromszögben $AT = R$, ezt a hosszt keressük és Pitagorasz tételével meg is határozható:

$$R^2 = AT^2 = AO_1^2 - O_1T^2 = \left(\frac{r_1 + r_2}{2}\right)^2 - \left|\frac{r_1 - r_2}{2}\right|^2 = r_1r_2, \tag{4}$$

azaz $R = \sqrt{r_1r_2}$.

c) Az 1 összefüggések közül csak a legelső módosul az alábbi módon:

$$O_1AT\angle = \frac{180^\circ}{n},$$

így az általános esetben

$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{1 + \sin\frac{180^\circ}{n}}{1 - \sin\frac{180^\circ}{n}},$$

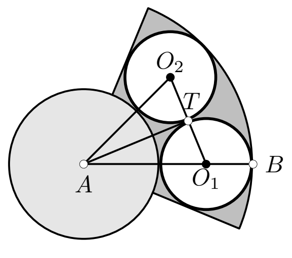
míg az $R = \sqrt{r_1r_2}$ összefüggés ugyanúgy érvényben marad.

1.53. Invertáljuk az 1.52. feladatban vizsgált konfigurációt egy tetszőleges, de a zottani k_1, k_2 koncentrikus körökkel nem koncentrikus körre!

1.60. a) Komplex számok hányadosának argumentuma az osztandó és az osztó argumentumának különbsége. A $(z_1, z_2, z_3) = \frac{z_1-z_3}{z_3-z_2}$ osztóviszony argumentuma (forgásszöge) az $(z_1 - z_3)$, $(z_3 - z_2)$ komplex számok argumentumának különbsége. A hányados tehát pontosan akkor valós, ha a z_1 és z_3 ponton átmenő egyenes egyállású a z_3 és z_2 ponton átmenő egyenessel, azaz pontosan akkor, ha z_1, z_2 és z_3 egy egyenesen van.

b) A hasonlósági transzformációk megtartják a szakaszok egymáshoz viszonyított arányát és a szögek nagyságát, tehát megőrzik három komplex szám komplex osztóviszonyát is. Természetesen ezek hányadosát, a kettősviszonyt is megőrzik.

c) Ezt elég az origó középpontú egységkörre vonatkozó inverzióra igazolni, hiszen hasonlósági transzformációkkal ebből minden inverzió elkészíthető. Az alábbi algebrai összefüggést kell igazolni:



1.52M.2. ábra.

$$\overline{\left(\frac{z_1 - z_3}{z_3 - z_2} : \frac{z_1 - z_4}{z_4 - z_2}\right)} = \frac{\frac{1}{\overline{z_1}} - \frac{1}{\overline{z_3}}}{\frac{1}{\overline{z_3}} - \frac{1}{\overline{z_2}}} : \frac{\frac{1}{\overline{z_1}} - \frac{1}{\overline{z_4}}}{\frac{1}{\overline{z_4}} - \frac{1}{\overline{z_2}}}$$

De

$$\overline{\left(\frac{z_1 - z_3}{z_3 - z_2} : \frac{z_1 - z_4}{z_4 - z_2}\right)} = \overline{\left(\frac{(z_1 - z_3)(z_4 - z_2)}{(z_3 - z_2)(z_1 - z_4)}\right)} = \frac{(\overline{z_1} - \overline{z_3})(\overline{z_4} - \overline{z_2})}{(\overline{z_3} - \overline{z_2})(\overline{z_1} - \overline{z_4})}$$

míg

$$\frac{\frac{1}{\overline{z_1}} - \frac{1}{\overline{z_3}}}{\frac{1}{\overline{z_3}} - \frac{1}{\overline{z_2}}} : \frac{\frac{1}{\overline{z_1}} - \frac{1}{\overline{z_4}}}{\frac{1}{\overline{z_4}} - \frac{1}{\overline{z_2}}} = \frac{\left(\frac{1}{\overline{z_1}} - \frac{1}{\overline{z_3}}\right)\left(\frac{1}{\overline{z_4}} - \frac{1}{\overline{z_2}}\right)}{\left(\frac{1}{\overline{z_3}} - \frac{1}{\overline{z_2}}\right)\left(\frac{1}{\overline{z_1}} - \frac{1}{\overline{z_4}}\right)}$$

így a jobb oldali törtet $\overline{z_1 z_2 z_3 z_4}$-gyel bővítve a bizonyítandó állítást kapjuk.

d) A $(z_1, z_2, z_3) = \frac{z_1 - z_3}{z_3 - z_2}$ osztóviszony értéke olyan komplex szám, amelynek argumentuma mod 180° megadja azt a szöget, amellyel a z_2, z_3 pontokon átmenő egyenest el kell forgatni, hogy a z_3, z_1 pontokon átmenő egyenest kapjuk. Ehhez hasonlóan, a $(z_1, z_2, z_4) = \frac{z_1 - z_4}{z_4 - z_2}$ osztóviszony argumentuma mod 180° az a szög, amellyel a z_2, z_4 pontokon átmenő egyenest el kell forgatni, hogy a z_4, z_1 pontokon átmenő egyenest kapjuk. A két osztóviszony hányadosa pontosan akkor valós, ha a két osztóviszony argumentuma egyenlő egymással mod 180°.

Ha ez a két szög 0-val kongruens mod 180°, akkor a négy pont egy egyenesen van, ha pedig egy $\alpha \neq 0$ szöggel kongruens mod 180°, akkor a z_3 és a z_4 komplex számoknak megfelelő pontok illeszkednek a z_1, z_2 pontpár α szögű látókörére. Ezzel az állítást igazoltuk.

1.64.

1. megoldás. A k gömbi kör a g gömbnek valamely Σ_k síkkal való metszete. Legyen k középpontja a Σ_k síkban O_k, legyen továbbá a g gömb középpontja O_g.

Tekintsük az O_g, O_k, P pontokat!

Ha $P = O_g$, akkor a vetítés egyben középpontos tükrözés, ez tényleg körtartó.

Ha $P = O_k$, akkor k vetítése egy önmagára való középpontos tükrözés, k képe kör.

Ha $O_g = O_k$, akkor tekintsük a g gömb k körre merőleges $k^\perp$ átmérőegyenesét. Ha P illeszkedik erre az egyenesre, akkor a teljes ábra forgástengelye a $k^\perp$ egyenes, természetes, hogy a k kör képe is kör lesz. Ha P nem illeszkedik a $k^\perp$ egyenesre, akkor a P pont és a $k^\perp$ egyenes által kifeszített Π sík szimmetriasíkja az ábrának, a további vizsgálatok megegyeznek azzal az esettel, amikor O_g, O_k és P mind különbözőek.

Ha O_g, O_k és P különbözőek, akkor az ábránk megint forgásszimmetrikus.

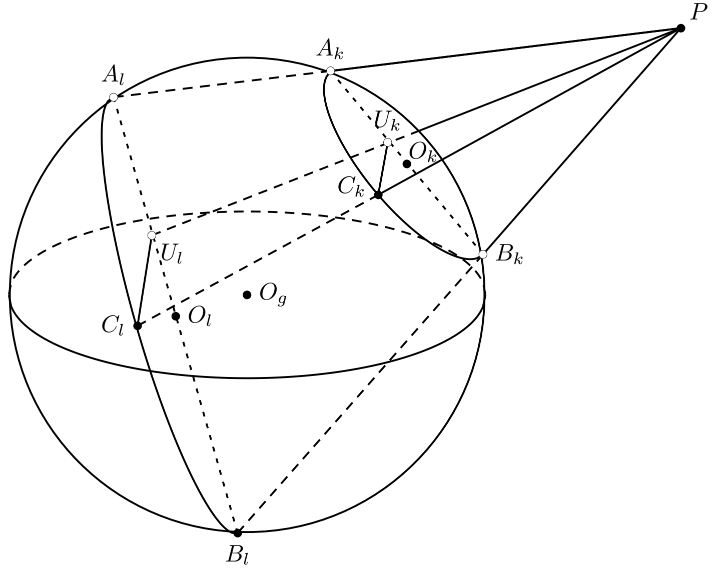
Végül, ha O_g, O_k és P nincsenek egy egyenesen, akkor tekintsük e három pont Π síkját. Messe ez a sík a k kört az $A_k B_k$ érintőben és legyen a PA_k, PB_k egyenesek másik metszéspontja a g gömbbel A_l illetve B_l. A g gömb szimmetrikus a Π síkra,

mert rajta van a középpontja, és a k kör is szimmetrikus Π-re, hiszen Π tartalmazza a k kör forgástengelyét az $O_g O_k$ egyenest. Ebből következően a Π sík az egész ábra, tehát a k kör P-ből vetített l képének is szimmetriasíkja lesz.

A g gömböt a Π sík két félgömbre osztja. A g gömbnem a P-ből való önmagára vetítése kicseréli egymással ezt a két félgömböt, ha a P pont a g gömb belső pontja, míg az egyes félgömböket önmagára képezi, ha g külső pont.

Tekintsük a k kör tetszőleges C_k pontját és annak $A_k B_k$ egyenesre vonatkozó U_k merőleges vetületét. Messe a PU_k egyenes az $A_l B_l$ egyenest U_l-ben és bocsássunk merőleges $A_l B_l$-re U_l-ben. Állítjuk, hogy e merőlegesnek a G gömbbel való egyik – az előző bekezdésben foglaltaknak megfelelő – metszéspontja az a C_l pont, amely a C_k pont képe a g gömbnek a P pontból önmagára való vetítésénél. Ha ezt igazoljuk, akkor ezzel a feladat állítását is bizonyítjuk, hiszen az így adódó C_l pontok mértani helye az $A_l B_l$ egyenesen átmenő, a Π síkra merőleges Σ_l sík és a g gömb metszésvonala, ami egy l kör. (Lásd az 1. ábrát)

A P, U_k, U_l pontok egy egyenesen vannak és az $U_k C_k$, $U_l C_l$ egyenesek párhuzamosak



1.64M1.1. ábra.

egymással, így mindössze annyit kell igazolnunk, hogy

$$\frac{U_lC_l}{U_kC_k}=\frac{PU_l}{PU_k}. \tag{1}$$

Írjuk fel a magasságtételt a k, l körökben az A_kB_k, A_lB_l átmérőkre írt $A_kC_kB_k$, $A_lC_lB_l$ derékszögű háromszögekre!

$$U_lC_l^2=U_lA_l\cdot U_lB_l,\qquad U_kC_k^2=U_kA_k\cdot U_kB_k. \tag{2}$$

Ennek fényében (1) igazolásához azt kell megmutatni, hogy

$$\frac{U_lA_l\cdot U_lB_l}{U_kA_k\cdot U_kB_k}=\frac{PU_l^2}{PU_k^2},$$

azaz

$$\frac{U_lA_l\cdot U_lB_l}{PU_l^2}=\frac{U_kA_k\cdot U_kB_k}{PU_k^2}. \tag{3}$$

írjuk fel a Szinusz-tételt a PU_lA_l, PU_lB_l, PU_kA_k, PU_kB_k háromszögekben!

$$\frac{U_lA_l}{PU_l}=\frac{\sin U_lPA_l\angle}{\sin PA_lU_l\angle},\qquad \frac{U_lB_l}{PU_l}=\frac{\sin U_lPB_l\angle}{\sin PB_lU_l\angle}, \tag{4}$$

illetve

$$\frac{U_kA_k}{PU_k}=\frac{\sin U_kPA_k\angle}{\sin PA_kU_k\angle},\qquad \frac{U_kB_k}{PU_k}=\frac{\sin U_kPB_k\angle}{\sin PB_kU_k\angle}. \tag{5}$$

A bizonyítandó (3) összefüggés trigonometrikus formája tehát

$$\frac{\sin U_lPA_l\angle\cdot\sin U_lPB_l\angle}{\sin PA_lU_l\angle\cdot\sin PB_lU_l\angle}=\frac{\sin U_kPA_k\angle\cdot\sin U_kPB_k\angle}{\sin PA_kU_k\angle\cdot\sin PB_kU_k\angle}. \tag{6}$$

Az A_l, B_l, A_k, B_k pontok mind illeszkednek a Π sík és a g gömb π körmetszetére, így

$$\begin{array}{lllllll}\sin PA_lU_l\angle &=& \sin A_kA_lB_l\angle &=& \sin A_kB_kB_l\angle &=& \sin U_kB_kP\angle,\\ \sin PB_lU_l\angle &=& \sin B_kB_lA_l\angle &=& \sin B_kA_kA_l\angle &=& \sin U_kA_kP\angle,\end{array} \tag{7}$$

Másrészt nyilvánvaló, hogy

$$\sin U_lPA_l\angle=\sin U_kPA_k\angle,\qquad \sin U_lPB_l\angle=\sin U_kPB_k\angle, \tag{8}$$

így a (7), (8) összefüggések igazolják a (6)relációt.

Megjegyzés A (3) önmagában is érdekes. Következik belőle pld a nevezetes „Pillangó-tétel”.

Ehhez tegyük fel, hogy P a g gömb, azaz a k kör belső pontja és $PU_l\geq PU_k$. A (3) összefüggés ilyenkor azt jelenti, hogy az U_l pontnak a k körre (a g gömbre) vonatkozó hatványa legalább akkora, mint az U_k pontnak a k-ra vonatkozó hatványa. Ha az U_kU_l egyenes a k kört a V_k, V_l pontokban metszi, akkor tehát

$$V_lU_l\cdot U_lV_k\geq V_kU_k\cdot U_kV_l,$$

azaz

$$V_lU_l\cdot(U_lU_k+U_kV_k)\geq V_kU_k\cdot(U_kU_l+U_lV_l),$$

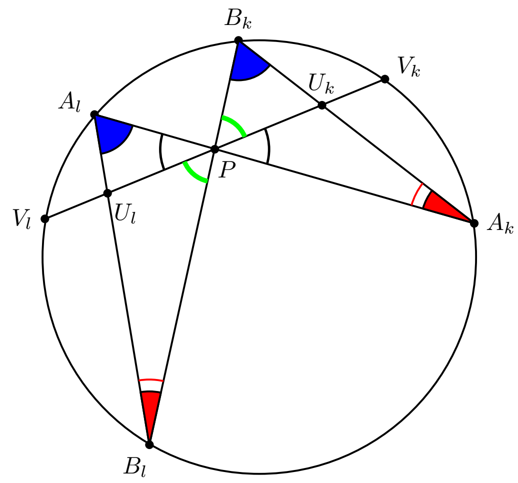
amiből a zárójelek felbontása, a $V_lU_l\cdot V_kU_k$ tag eliminálása és U_lU_k-val való osztás után $V_lU_l\geq V_kU_k$. Ezek a lépések megfordíthatók, így azt kaptuk, hogy a $PU_l\geq$ $\geq PU_k$, $V_lU_l\geq V_kU_k$ egyszerre teljesülnek. Ez azt is jelenti, hogy P pontosan akkor felezi az U_kU_l szakaszt, ha P az V_kV_l húr felezőpontja.

2. megoldás. *Inverzió a térben*

Legyen a P pontnak a g gömbre vonatkozó hatványa λ. A P centrumú λ paraméterű inverzió önmagára képezi a g gömböt úgy, hogy pontosan azt a leképezést valósítja meg rajta, mint a P-ből való vetrítés.

A k kör előállítható két gömb vagy egy gömb és egy sík metszésvonalaként. Az inverzió a gömbökből és síkokból gömböket és síkokat „csinál”, így a k kör képe is előáll két gömb vagy egy gömb és egy sík metszésvonalaként, tehát kör lesz.

3. megoldás. *Algebrai geometria*



1.64M1.2. ábra.

Először elmondjuk a gondolatmenet lényegét, utána részletezzük a bizonyítást. Tekintsük azt a $\mathcal{K}$ kúpot, amely a P ponton át a k kör pontjaihoz húzott egyenesek alkotnak. A $\mathcal{K}$ kúp a térbeli Descartes koordinátarendszerben egy háromváltozós másodfokú egyenlettel, jelben $\mathcal{K}_2 = 0$ adható meg. Ennek részletes indoklását kéőbb adjuk meg. A g gömb is egy háromváltozós másodfokú egyenlettel – jelben $\mathcal{G}_2 = 0$ – adható meg ugyanabban a koordinátarendszerben.

E két egyenlet $\alpha\mathcal{K}_2 + \beta\mathcal{G}_2 = 0$ lineáris kombinációi is háromváltozós másodfokú egyenlettel megadható alakzatok, és ezek az alakzatok mind tartalmazzák a g gömb és a $\mathcal{K}$ kúp közös pontjait.

Tekintsük a k kör Σ_k síkjának egy k pontjaitól különböző Q pontját. Q a gömbön és a kúpon sincs rajta, így azok egyenletébe beírva Q koordinátáit a kapott $\mathcal{G}(Q)$, $\mathcal{K}(Q)$ értékek zérustól különbözőek lesznek. Tekintsük tehát a

$$\mathcal{G}(Q)\mathcal{K}_2 - \mathcal{K}(Q)\mathcal{G}_2 = 0 \tag{1}$$

egyenlettel megadható másodrendű felületet. Ezt az egyenletet kielégíti K minden pontja és a Q pont is. Ebből következik, hogy a Σ_k sík minden pontja is kielégíti az egyenletet. Valóban, egy többváltozós poklinomnak valamely egyenesre való megszorítása is is másodfokú polinom az egyenesen, így vagy azonosan nulla azon az egyenesen vagy legfeljebb két zérushelye van ott. A Q-n átmenő k-t metsző egyeneseken azonban három zérushelye is van vizsgált polinomunknak, így ezeken az egyeneseken azonosan nulla. Ebből következik, hogy a k kör belsejében is azonosan nulla és Σ_k minden pontján át húzható k belsején áthaladó egyenes, így a kifejezés zérus a teljes Σ_k síkon.

Vegyünk fel egy új koordinátarendszert, amelynek origója, y és z tengelye is a Σ_z síkban van, amelbyen tehát Σ_z egyenlete az $x = 0$ egyenlet. Nem nehéz igazolni, hogy a G, $\mathcal{K}$ alakzatok egyenlete ezen új koordinátarendszerbe nis másodfokú, utóbbié legyen $\mathcal{K}_2' = 0$. Részletesebben:

$$\mathcal{K}_2' : \quad a_{11}x^2 + a_{12}xy + a_{13}xz + a_{14}x + a_{22}y^2 + a_{23}yz + a_{24}y + a_{33}z^2 + a_{34}z + a_{44} = 0. \tag{2}$$

A $\mathcal{K}_2'$ kifejezés mindig zérus, ha $x = 0$, azaz a $a_{22}y^2 + a_{23}yz + a_{24}y + a_{33}z^2 + a_{34}z + {}$ $+\, a_{44}$ kifejezés értéke y és z bármely értéke esetén nulla. Nem nehéz igazolni, hogy ez csak akkor fordulhat elő, ha

$$a_{22} = a_{23} = a_{24} = a_{33} = a_{34} = a_{44} = 0.$$

Ekkor tehát

$$\mathcal{K}_2' : \quad x\,(a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + a_{14}) = 0. \tag{3}$$

A $a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + a_{14} = 0$ egyenlet egy Σ_l sík egyenlete, tehát a kúp és a gömb metszéspontjai két síkban helyezkednek el, ahol nyilván két kört alkotnak, hiszen a gömb és a sík metszésvonala kör. A P-ből való vetítés egymásra képezi ezt a két síkot, ezt a két kört.

1.67. Invertáljuk az ABC háromszög csúcsait és k körülírt körét a háromszög i beírt körére! Az inverzió 1.1M. megoldásban leírt szerkesztése szerint az A, B, C pontok A', B', C' képe rendre a B_1C_1, C_1A_1, A_1B_1 szakasz felezőpontja. A k kör képe tehát az $A_1B_1C_1$ háromszög k' Feuerbach köre. Ennek O_F középpontja nem a k kör O középpontjának képe, de az inverzió középpontja, az invertált és a képkör középpontjai egy egyenesen vannak, azaz most

$$O_1, \quad O \quad \text{és} \quad O_F$$

kollineáris. Másrészt az $A_1B_1C_1$ háromszög Euler egyenesén van e háromszög körülírt és Feuerbach körének középpontja, valamint a magasságpontja, azaz

$$O_1, \quad O_F \quad \text{és} \quad M_1$$

is kollineáris. Ebből következik, hogy

$$O, \quad O_1 \quad \text{és} \quad M_1$$

egy egyenesen vannak.

1.68. Két olyan kör is van, amely érinti az AB, AC oldalegyeneseket és az ω kört: az egyik, amelyet most nem vizsgálunk, az ω kör külsejében van, tehát az ABC háromszöglapon és így az i körön is kívül helyezkedik el.

Alkalmazzunk i-re vonatkozó inverziót! (lásd az 1. ábrát). Az i kör AB, AC és BC oldalon található T_C, T_B, T_A érintési pontjai fixen maradna az inverziónál. Ismeretes, hogy az A, B, C csúcsok ilyenkor az T_BT_C, T_CT_A, T_AT_B szakaszok A', B', C' felezőpontjaiba képződnek.. Az ω körülírt kör képe a $T_AT_BT_C$ háromszög Feuerbach köre lesz, melynek sugara a $T_AT_BT_C$ háromszög körülírt köre sugarának fele lesz.

Az AB, AC egyenesek IT_C, IT_B átmérőjű körökbe képződnek, ahol I az i kör középpontja, inverziónk centruma. Ezeknek a köröknek a sugara is fele az i beírt körének és mindketten átmennek az A' ponton. Ez a két kör adott, míg az ω' kör változhat, de ő is ugyanakkora sugarú, A'-n átmenő kör. Van-e olyan kör, amely érinti mind a három legutóbb említett kört?

Igen van: az A' középpontú, i-vel azonos sugarú c_A' kör megfelelő (lásd a 2. ábrát). Ez nem lehet teljességgel i belsejében, hiszen azzal egyenlő sugarú. Emiatt invertált képe, c_A sem lesz teljesn i-n kívül, nem egyezhet meg a megoldás elején említett „rossz” körrel. A most kapott c_A kör tehát megfelelő és független a B, C pontpár választásától.

1.73. Lásd Kömal[5][6], F. 1783 (1971/9).

1.74. Lásd Kömal 768. gyakorlat (1962/4).

1.75. Lásd Kömal P. 80 (1972/2).

1.76. Lásd Kömal P. 84 (1972/4).

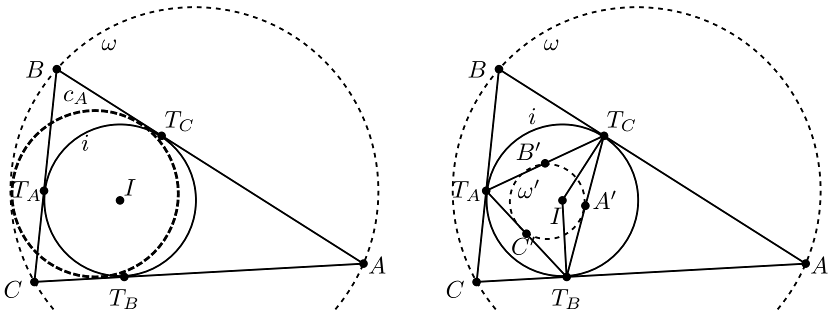
1.77. Az 1982. évi Nemzetközi Matematikai Diákolimpia 2. feladata (Kömal 1984/1)

1.78. Lásd Kömal P. 44 (1970/4).

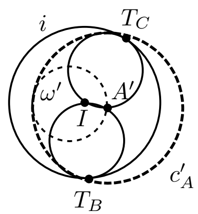
1.79. Lásd Kömal P. 28 (1969/12).

2. Projektív geometria

2.2. A fényképezés egy vetítésnek fogható fel. A külvilágot a fényképezőgép P fókuszpontjából a film Σ síkjára vetítjük. A fényképen megjelenő $ABCD$ négyszög a valóságos focipálya, az $A'B'C'D'$ téglalap képe ennél a vetítésnél. Az $A'D'$ alapvonal és a P fókuszpont egy Σ_{AD} síkot alkot, ez a sík tartalmazza a fókuszpontot az oldalvonal bármely pontjával összekötő egyenest, tehát az AD egyenes a Σ_{AD} sík és a Σ sík metszésvonala. Az $A'D'$-vel párhuzamos $B'C'$ alapvonal és a P pont



1.68M.1. ábra.



1.68M.2. ábra.

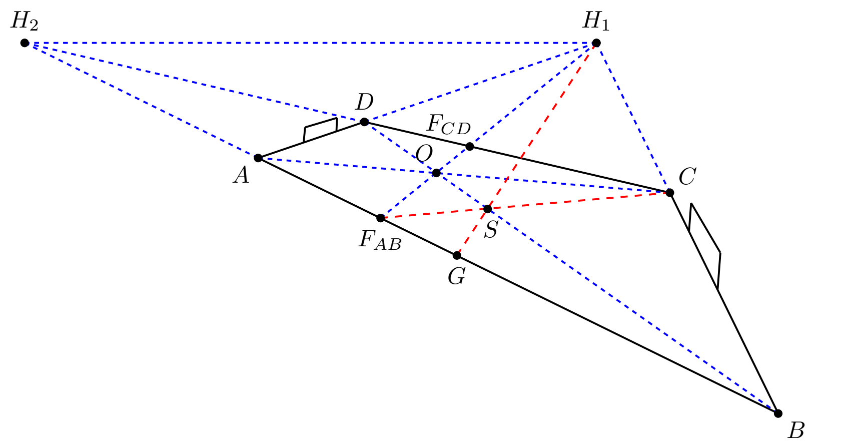
síkja Σ_{BC}, melynek Σ-val való metszete a BC egyenes. A Σ_{AD} és a Σ_{BC} sík is tartalmazza a P ponton át az $A'D'$, $B'C'$ egyenesekkel párhuzamosan húzott h_1 egyenest. Ha h_1 a film Σ síkját H_1-ben metszi, akkor H_1 egyben az AD, BC egyenesek metszépontja is. Az focipálya valódi síkjában az $A'D'$, $B'C'$ egyenesekkel párhuzamos egyenesek képei mind H_1-en mennek át, mert bármelyik ilyen egyenes és a P pont olyan síkot feszít ki, amely tartalmazza a h_1 egyenest.

Ehhez hasonlóan a focipálya $A'B'$, $C'D'$ oldalvonalainak és az ezekkel párhuzamos egyeneseknek olyan egyenesek a képei, pl AB és CD, amelyek a Σ sík egy H_2 pontján haladnak át.

a) A pálya középpontja az $A'C'$, $B'D'$ átlók O' metszéspontja, ennek O képét megkapjuk az AC, BD egyenesek metszéspontjaként. A pálya középvonala az O' ponton át az $A'D'$, $B'C'$ alapvonalakkal párhuzamosan húzott egyenes, melynek képe tehát az OH_1 egyenes. OH_1 egyenes és az AB, CD egyenesek F_{AB}, F_{CD} metszéspontjai az oldalvonalak felezőpontjainak képei.

b) Felhasználjuk, hogy a súlypont harmadolja a súlyvonalat. A pálya oldalvonalainak F'_{AB}, F'_{CD} felezőpontjai és a B' sarokzászló alkotta háromszög egyik súlyvonala $O'B'$, egy másik súlyvonala $F'_{AB}C'$ így a háromszög S' súlypontjának képe a Σ síkon $S = F_{AB}C \cap OB$. A harmadolóvonal az SH_1 egyenes.

2.4. d) Erre a feladatrészre adunk egy számolás nélküli indoklást. Legyen festőhöz legközelebbi parkettalap az $UVV'U'$ lap, a festő szeme a Q pont, az UV, $U'V'$ szakaszok felezőpontja F_{UV} és F', az F' pont képe a vásznon F_{ZW}. Az $UVV'U'$ parkettalappal szomszédos egyik négyzetlap (lásd a 2. ábrát) $TUU'T'$, ezen a TU

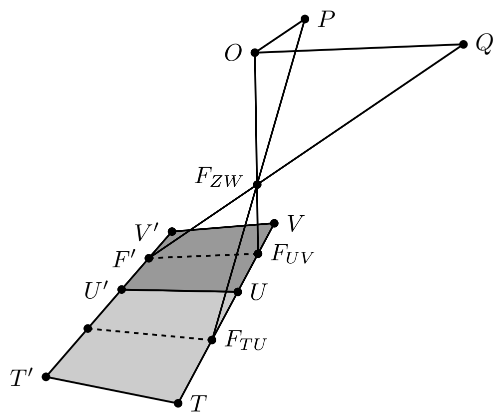


2.2M.2. ábra.

oldalél felezőpontja F_{TU}. A vizsgált TU', UV' átlókkal párhuzamos a parkettalapok síkjában az $F_{TU}F'$ egyenes is, melynek képe a vásznon az $F_{TU}F_{ZW}$ egyenes, amely tehát szintén P-ben metszi az OP horizontot. Az $F_{UV}F'$, $F_{UV}F_{TU}$ szakaszok egyenlőek egymással, hiszen mindketten egyenlők a parketta négyzetlapok oldalával. Az $F_{ZW}F_{UV}F'$, $F_{ZW}F_{UV}F_{TU}$ háromszögek így egybevágó derékszögű háromszögek, amelyek az $F_{UV}O$ tengely körüli derékszögben egymásba forgathatók. Ez a forgatás egyúttal egymásba viszi a P, Q pontokat is, hiszen ezek a pontok az egymásba forduló $F_{TU}F_{ZW}$, $F'F_{ZW}$ egyeneseknek a forgatásnál önmagába képződő OPQ síkkal (a Q ponton áthaladó a parkettalapok, azaz a földfelszín síkjával párhuzamos síkkal) való metszéspontjai.

2.7. a) Az $ABCD$ négyszög AB, CD szemközti oldalainak meghosszabbítását jelölje U, a BC, DA oldalegyenesekét V. Legyen O a négyszög Σ síkjára nem illeszkedő tetszőleges pont és vetítsük Σ-t O-ból a $\Pi = OUV$ síkkal párhuzamos Π' síkra. Az OU, OV vetítősugarak párhuzamosak ezzel a síkkal, így U és V a Π' sík ideális pontjába képződik, az $ABCD$ négyszög $A'B'C'D'$ képén az $A'B'$, $C'D'$ és a $B'C'$, $D'A'$ egyenesek is párhuzamosak lesznek.

b) Azt mutatjuk meg, hogy az $A'B'C'D'$ paralelogramma átvihető négyzetbe. Legyen Γ tetszőleges sík, amely tartalmazza az $A'B'$ egyenest, de nem tartalmazza C'-t és D'-t. A Γ sík megfelelő C^*, D^* pontjaira ABC^*D^* négyzet. Mivel C^*D^* és $C'D'$ is párhuzamos és egyenlő hosszú $A'B'$-vel így azok egymással is egyenlőek és párhuzamosak, azaz $C'D'D^*C^*$ paralelogramma. Ha a Π' síkot a $C'C^*$ egyenessel párhuzamos vetítősugarakkal átvetítjük a Γ síkra, akkor az $A'B'C'D'$



2.4M.2. ábra.

paralelogramma képe az $A'B'C^*D^*$ négyzet lesz.

c) Az a) feladatrész megoldásának ábrájára alkalmazzunk egy olyan $\mathcal{A}$ affin transzformációt, amely Σ síkon identikus, és az $A'B'C'D'$ paralelogrammát négyzetbe képezi. A $\mathcal{A}(O)$ pontból a $\mathcal{A}(\Pi')$ síkra vetítve az $ABCD$ négyszög az $\mathcal{A}(A'B'C'D')$ négyzetbe képződik.

2.10. Jelölje T_{PQR} a PQR háromszög előjeles, tehát a háromszög körüljárásának megfelelő előjelű, területét!

Az alábbi összefüggés annak alapján írható fel, hogy az említett háromszögek mindegyikének magassága az O pont és az $ABCD$ egyenes távolsága.

$$(ABCD) = \frac{AC \cdot DB}{CB \cdot AD} = \frac{T_{ACO} \cdot T_{DBO}}{T_{CBO} \cdot T_{ADO}} = \frac{(OA \cdot OC \cdot \sin(ac)) \cdot (OD \cdot OB \cdot \sin(db))}{(OC \cdot OB \cdot \sin(cb)) \cdot (OA \cdot OD \cdot \sin(ad))} =$$

$$= \frac{\sin(ac) \cdot \sin(db)}{\sin(cb)\sin(ad)} = (abcd).$$

2.12. $(ABC) = AC/CB = (3-0)/(1-3) = -\frac{3}{2}$. $(ABCD) = (ABC)/(ABD)$, amiből $(ABD) = (ABC)/(ABCD) = -\frac{3}{8}$. $(ABD) = (d-0)/(1-d) = -\frac{3}{8}$, miből $d = -\frac{3}{5}$.

2.13. a) $(ABC) = \frac{7-(-3)}{1-7} = -\frac{5}{3}$, $(ABD) = \frac{10-(-3)}{1-10} = -\frac{13}{9}$,
$(ABCD) = (ABC)/(ABD) = \frac{15}{13}$.
b) $(DCB) = \frac{1-10}{7-1} = -\frac{3}{2}$, $(DCA) = \frac{(-3)-10}{7-(-3)} = -\frac{13}{10}$,
$(ABCD) = (ABC)/(ABD) = \frac{15}{13}$.
c) $(ABC) = -\frac{5}{3}$, $(ABE) = -1$, $(ABCD) = \frac{5}{3}$.

2.16. Vegyünk fel egy $ABCD$ egyenesre nem illeszkedő tetszőleges P pontot és a PB egyenesen egy P-től és B-től különböző Q pontot. Legyen még $R = DQ \cap PA$, $V = DQ \cap PC$ valamint a)-ban kell még $S = AQ \cap PC$ és b)-ben $T = CQ \cap PA$ (lásd az 1. ábrát).
a) $(ABCD) \overset{Q}{=} (SPCV) \overset{A}{=} (QRDV) \overset{P}{=} (BADC)$
b) $(ABCD) \overset{P}{=} (RQVD) \overset{C}{=} (RTPA) \overset{Q}{=} (DCBA)$

2.23. $(ABDC) = \frac{AD}{DB} / \frac{AC}{CB} = \frac{AD \cdot CB}{DB \cdot AC} = \frac{1}{\frac{AC}{CB} / \frac{AD}{DB}} = \frac{1}{(ABCD)} = \frac{1}{x}$.
$(BACD) = \frac{BC}{CA} / \frac{BD}{DA} = \frac{BC \cdot DA}{CA \cdot BD} = \frac{AD \cdot CB}{DB \cdot AC} = \frac{1}{x}$, mint fent.
Ha $y = (ACBD) = \frac{AB}{BC} / \frac{AD}{DC} = \frac{AB \cdot DC}{BC \cdot AD}$ és $x = \frac{AC \cdot DB}{CB \cdot AD}$, akkor

$$y + x = \frac{AB \cdot CD + AC \cdot DB}{CB \cdot AD} = \frac{AB \cdot (CB + BD) + AC \cdot DB}{CB \cdot AD} =$$

$$= \frac{AB \cdot CB + AB \cdot BD + AC \cdot DB}{CB \cdot AD} = \frac{AB \cdot CB + BA \cdot DB + AC \cdot DB}{CB \cdot AD} =$$
$$= \frac{AB \cdot CB + (BA + AC) \cdot DB}{CB \cdot AD} = \frac{AB \cdot CB + BC \cdot DB}{CB \cdot AD} =$$
$$= \frac{AB \cdot CB + CB \cdot BD}{CB \cdot AD} = \frac{(AB + BD) \cdot CB}{CB \cdot AD} = \frac{AD \cdot CB}{CB \cdot AD} = 1,$$

azaz $y = 1 - x$.

Innen minden permutáció számolható. Pl az A-val kezdődőek:
$(ABCD) = x$, $(ABDC) = \frac{1}{x}$, $(ACBD) = 1 - x$, $(ACDB) = \frac{1}{1-x}$, $(ADCB) = 1 - \frac{1}{1-x} = \frac{x}{x-1}$, $(ADBC) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}$

x	$1-x$	$\frac{1}{x}$	$\frac{1}{1-x}$	$\frac{x}{x-1}$	$\frac{x-1}{x}$
$(ABCD)$	$(ACBD)$	$(ABDC)$	$(ACDB)$	$(ADCB)$	$(ADBC)$
$(BADC)$	$(BDAC)$	$(BACD)$	$(BDCA)$	$(BCDA)$	$(BCAD)$
$(CDAB)$	$(CADB)$	$(CDBA)$	$(CABD)$	$(CBAD)$	$(CBDA)$
$(DCBA)$	$(DBCA)$	$(DCAB)$	$(DBAC)$	$(DABC)$	$(DACB)$

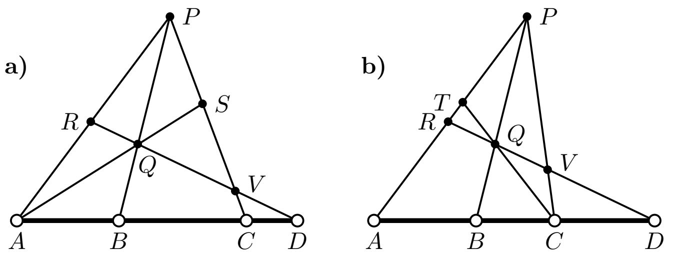
2.24. Eredmény: $(ABCD) = \frac{\beta_1 \alpha_2}{\beta_2 \alpha_1}$.

2.25. a) A hányados argumentuma a $z_3 z_2 z_1$ irányított szöggel egyenlő.

b) Az irányítástartó hasonlósági transzformációk az eltolások és a forgatva nyújtások. A t komplex számmal való eltolás a $z \to z + t$, a b pont körüli $a = \lambda(\cos\varphi + i \sin\varphi)$ komplex számmal való forgatva nyújtás (ϕ szöggel való forgatás és λ arányú nyújtás) a $z \to a(z - b) + b = az + b(1 - a)$ képlettel adható meg. A konstans hozzáadása már a $z_i - z_j$ különbségeket sem változtatja meg, a konstanssal való szorzás pedig ezek hányadosát hagyja invariánsan.

c) Ha a b középpontú λ paraméterű inverziónál z invertáltja z', akkor $(z' - b)\overline{(z - b)} = \lambda$, azaz

$$z' = b + \frac{\lambda}{\overline{z - b}}.$$



2.16M.1. ábra.

A b szám kivonása illetve hozzáadása, a λ-val való szorzás nem változtatja az osztóviszonyt, így a kettősviszonyt sem. Csak azt kell megmutatnunk, hogy a $z \to \frac{1}{z}$ leképezés, tehát az egységköre vonatkozó inverzió, a konjugáltjára változtatja a kettősviszonyt.

$$(\frac{1}{\overline{z_1}}, \frac{1}{\overline{z_2}}, \frac{1}{\overline{z_3}}, \frac{1}{\overline{z_4}}) = \frac{(\frac{1}{\overline{z_1}} - \frac{1}{\overline{z_3}})(\frac{1}{\overline{z_4}} - \frac{1}{\overline{z_2}})}{\frac{1}{(\overline{z_3}} - \frac{1}{\overline{z_2}})(\frac{1}{\overline{z_1}} - \frac{1}{\overline{z_4}})} = \frac{\left(\frac{\overline{z_3} - \overline{z_1}}{\overline{z_1 z_3}}\right)\left(\frac{\overline{z_2} - \overline{z_4}}{\overline{z_4 z_2}}\right)}{\left(\frac{\overline{z_2} - \overline{z_3}}{\overline{z_3 z_2}}\right)\left(\frac{\overline{z_4} - \overline{z_1}}{\overline{z_1 z_4}}\right)} =$$
$$= \frac{(\overline{z_3} - \overline{z_1})(\overline{z_2} - \overline{z_4})}{(\overline{z_2} - \overline{z_3})(\overline{z_4} - \overline{z_1})} = \overline{(z_1 z_2 z_3 z_4)}.$$

2.27. Egy korábbi feladat állítása szerint az $(ABCD)$ kettősviszony értéke valós. Így $(ABCD)$ kiszámításához csak az A, B, C, D pontok közti szakaszok hosszát kell figyelembe vennünk, illetve meg kell vizsgálni a kettősviszony előjelét is.

Az $(ABCD)$ komplex kettősviszony és az $(abcd)$ sugárnégyes kettősviszonya egyszerre negatív, ha az AB pontpár elválasztja a CD pontpárt, ami ugyanakkor következik be, ha az ab egyenespár elválasztja a cd egyenespárt.

Alkalmazzuk a Nagy Szinusz Tételt a PAC, PCB, PAD, PDB háromszögekre! Ha az adott kör sugara r, akkor

$$AC = 2r \sin ac, \quad CB = 2r \sin cb, \quad AD = 2r \sin ad, \quad DB = 2r \sin db, \quad (1)$$

így $(ABCD) = (abcd)$. Megjegyezzük, hogy a (1) összefüggés akkor is teljesül, ha P megegyezik az A, B, C, D pontok valamelyikével, pl A-val, mert ilyenkor a húr pl AC kerületi szöge a PA érintő és az AC húr szögével egyenlő.

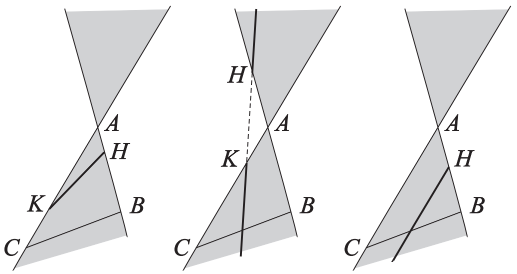
2.39. Jelöle a k vezérkörű A csúcsú kúpot $\mathcal{A}$, a k kör Σ síkjától különböző vizsgált síkot Π, a Π, Σ síkok metszésvonalát e, a k kör e-re merőleges átmérőjét BC, az $\mathcal{A}$ kúp AB, AC alkotóinak a Π síkkal való metszéspontjait, amennyiben léteznek, H és K. A bizonyítás során elsősorban az A, B, C, H, K pontok Δ síkjában dolgozunk. A BC átmérő és az e egyenes G metszéspontja HK-ra is illeszkedik, hiszen $G = \Sigma \cap \Delta \cap \Pi$, míg $HK = \Delta \cap \Pi$ (lásd a 2. ábrát).

Az 1. ábrán a Δ sík látható. A szürkére színezett kettős szögtartomány $\mathcal{A}$ belseje, a BC szakasz pedig a k kör átmérője. A Π metsző sík és a Δ sík HK metszésvonala három lényegesen különböző módon helyezkedhet el: vagy csak az egyik szögtartományt metszi el, vagy mindkét szögtartománnyal van közös pontja, vagy párhuzamos az egyik szögszárral, amikor is H és K egyike, a továbbiakban K, nem is jön létre. Látni fogjuk, hogy ezekben az esetekben rendre ellipszis (esetleg kör), hiperbola illetve parabola lesz a Π sík és a $\mathcal{A}$ kúp metszésvonala.

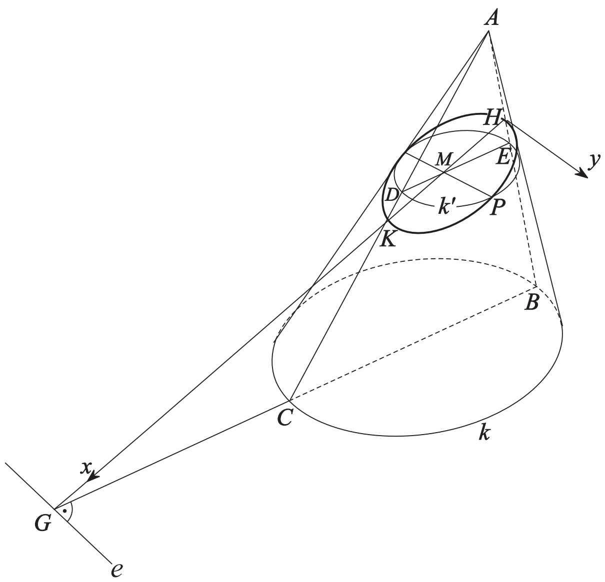
Jelölje $\mathcal{A}$ és Π egy tetszőleges közös pontját P. Fektessünk P-n át a k alapkörrel párhuzamos síkot, amely a kúpból kimetszi a DE átmérőjő k' kört. Húzzunk végül a P pontból az e egyenessel párhuzamost, azaz a DE átmérőre merőlegest.

Az így nyert PM szakasz hosszát szeretnénk meghatározni. A P pont illeszkedik a DE szakasz k' Thalesz-körére, így a DPE háromszög derékszögű. Ebben – a magasságtétel szerint – $PM^2 = DM \cdot EM$. Másrészt, az EHM és BHG, illetve a DMK és CGK hasonló háromszögekből (lásd a 2. ábrát vagy a 3. ábra bal oldali részábráját)

$$\frac{DM}{MK} = \frac{CG}{GK}, \qquad \frac{EM}{MH} = \frac{BG}{GH}, \tag{1}$$



2.39M.1. ábra.



2.39M.2. ábra.

így

$$PM^2 = MK \cdot MH \cdot \frac{CG \cdot BG}{GK \cdot GH}. \tag{2}$$

Vegyük most tekintetbe, hogy a $\frac{CG \cdot BG}{GK \cdot GH}$ tényező független a P pont helyzetétől, tehát, ha μ^2-tel jelöljük, akkor a metszésvonal egyenlete („szümptómája”):

$$PM^2 = \mu^2 \cdot MH \cdot MK. \tag{3}$$

Bár a 2. ábrán a 1. ábra bal oldali részábrájának megfelelő eset (ellipszis) látható, de a fenti levezetés a 1. ábrán látható középső esetben is (hiperbola) szó szerint ugyanez. A (3) szümptómát a két esetben különböző alapfeltevés mellett kell vizsgálni: az egyikben M a HK szakaszon, a másikban csak a HK szakaszon kívül lehet, illetve M mindkét esetben megegyezhet a H, K pontok bármelyikével.

Ha az 1. ábra jobb oldali esete valósul meg, akkor a 3. ábra jobb oldali részábráját vizsgáljuk. Itt KM és AC párhuzamosak, így a 4. összefüggések megfelelői most

$$DM = CG, \qquad \frac{EM}{MH} = \frac{BG}{GH}, \tag{4}$$

ezért a $PM^2 = DM \cdot ME$ magasságtételt is figyelembe véve

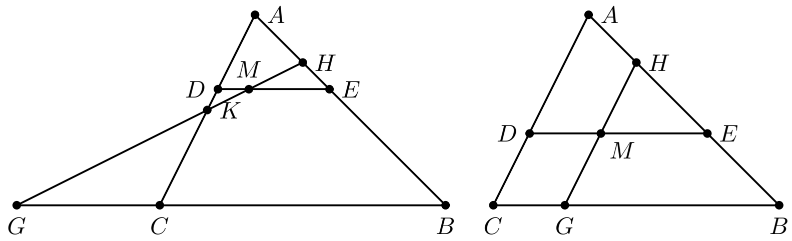
$$PM^2 = MH \cdot \frac{CG \cdot BG}{GH}. \tag{5}$$

A $\frac{CG \cdot BG}{GK \cdot GH} = \mu^2$ tényező független a P pont helyzetétől, tehát, a metszésvonal egyenlete:

$$PM^2 = \mu^2 \cdot MH, \tag{6}$$

ami valóban parabola egyenlete.

2.40. Alapozzunk a megoldást a 2.39M megoldásra. Ott láttuk, hogy ha e az alapkör síkjának és a metszési síknak a metszésvonala, KH a metszet egy átmérője,



2.39M.3. ábra.

amelyet a metszet P pontjából e-vel párhuzamosan bocsájtott egyenes M-ben metsz, akkor

$$PM^2 = MK \cdot MH \cdot \frac{CG \cdot BG}{GK \cdot GH}. \tag{1}$$

Itt nem részletezzük annak indoklását, hogy az 1. összefüggés pontosan akkor kör egyenlete, hogy e merőleges HK-ra és

$$CG \cdot BG = GK \cdot GH. \tag{2}$$

A merőlegességi feltétel azt jelenti, hogy a metsző sík szimmetrikus a kúp A csúcsán áthaladó, a k alapkör síkjára most merőleges síkra. A metszésvonal tehát az a HK átmérőjű kör, amely merőleges a szimmetriasíkra (egy ilyen kör van).

a) Körmetszet konstukciójához kiindulunk az alapkör BC átmérőjéből, majd a BC egyenesen felveszünk egy tetszőleges, de B-től és C-től különböző G pontot; az alapkörre merőleges, a BC egyenesre illeszkedő Δ síkon felveszünk egy G-t tartalmazó, de BC-től különböző GK egyenest és azon a H, K pontokat a (2) relációnak megfelelően. Ebben még azt is figyelembe kell venni (lásd a 2.39M megoldás esetszétválasztást bemutató ábráját), hogy G pontosan akkor van B és C között, ha H és K között van. Azt is mondhatjuk, hogy H a B, C, K pontokon áthaladó kör és a GK egyenes metszéspontja, hiszen a (2) egyenlet G-nek erre a körre vonatkozó hatványát fejezi ki kétféleképpen. A keresett kúp A csúcsa a BK, CH (vagy a BH, CK) egyenesek metszéspontja.

b) Tekintsük az alapkört és a K pontot is tartalmazó g gömböt. A 2. összefüggés a G pontnak erre a gömbre vonatkozó hatványát fejezi ki kétféleképpen, tehát H is illeszkedik g-re. A HK egyenesre illeszkedő, a szimmetriasíkra merőleges sík a g gömbből egy kört metsz ki, ami tehát szükségképpen megegyezik a vizsgált metszésvonallal.

2.41. b) Legyen a k kör t-re merőleges átmérője BC, a BC egyenes és t metszéspontja T. A keresett mértani hely a BC-re illeszkedő, az alapkörre merőleges Δ síkban található $r = \sqrt{TA \cdot TB}$ sugarú T középpontú kör, kivéve e kör BC egyenesre illeszkedő pontjait.

2.44.

1. megoldás. Az 1. ábrán az e_1, e_2, e_3, e_4 egyenesek alkotta négyoldal e_i, e_j egyeneseinek metszéspontját jelölje P_{ij}, a $P_{12}P_{34}$ egyenesnek a $P_{14}P_{23}$ egyenessel való metszéspontját U, a $P_{13}P_{24}$ egyenessel való metszéspontját V. Az UV egyenes a teljes négyoldal egy átlója, rajta U és V az átlóspontok.

Az alábbi kettősviszonyok egyenlők, mert a jelölt pontból egymásba vetíthetők a pontnégyesek:

$$(P_{12}P_{34}UV) \overset{P_{13}}{=} (P_{14}P_{23}UW) \overset{P_{24}}{=} (P_{34}P_{12}UV).$$

2. megoldás. Ha átvetítjöüük a síkot egy másik síkba úgy, hogy a $P_{14}P_{23}$ egyenes az ideális egyenesbe képződjön, akkor a $P_{34}P_{24}P_{12}P_{13}$ négyszögből paralelogramma lesz és azt kell bizonyítani, hogy a $P_{34}P_{12}$ átlót felezi a $P_{24}P13$ átló. Ez nyilvánvaló.

2.46.

1. megoldás. A π leképezés fixpontjai az $X = e \cap f$, $Y = O_1O_2 \cap e$ pontok.

$$(XYAP) \overset{\pi}{=} (XYBP') \overset{\pi}{=} (XYAP''),$$

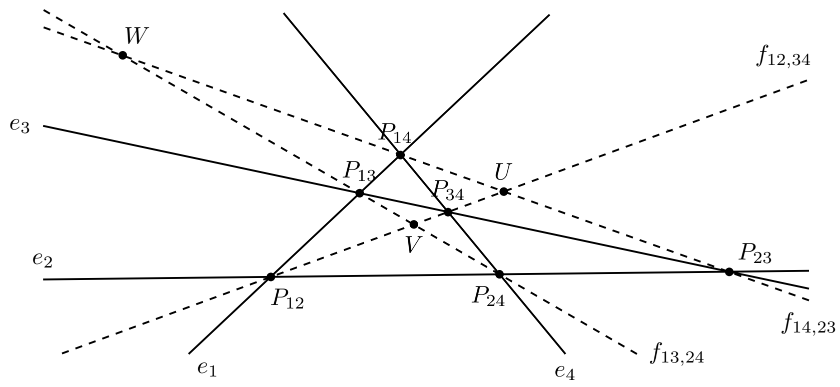
így $P'' = P$.

2. megoldás. Vetítsük át a síkot úgy, hogy az O_1 pont és az $X = e \cap f$ pont a végtelenbe kerüljön, tehát az e, f egyenesek illetve az AA_f, BB_f egyenesek párhuzamosak legyenek. Könnyű megmutatni, hogy a π transzformáció az új síkon az AB szakasz felezőpontjára vonatkozó középpontos tükrözés.

2.47. Egyrészt $(A\phi(A)B\phi(B)) \overset{\phi}{=} (\phi(A)A\phi(B)\phi(\phi(B)))$, másrészt $(ABCD) = (BADC)$, így $(A\phi(A)B\phi(B)) = (\phi(A)A\phi(B)B)$, így $\phi(\phi(B)) = B$.

2.48. b) Legyen $P_3 = P_1A_{13} \cap P_2A_{23}$, $P_4 = P_1A_{14} \cap P_2A_{24}$, így mindegyik feltétel teljesül. A P_3, P_4 pontok bármelyike lehet ideális is, tehát a $P_1P_2P_3P_4$ négyszög esetleg elfajul.

c) Legyen $P_1P_4 \cap P_2P_3 = X$ (lásd a 2. ábrát). Vetítsük az a egyenest P_2-ből P_1P_4-re, majd azt P_3-ból vissza a-ra:



2.44M1.1. ábra.

$$(A_{23}A_{14}A_{12}A_{24}) \stackrel{P_2}{=} (XA_{14}P_1P_4) \stackrel{P_3}{=} (A_{23}A_{14}A_{13}A_{34}).$$

A bal oldalon található kettősviszony meghatározott, a jobb oldali kettősviszonyt adó első három pont rögzített, így a negyedik, A_{34} is meghatározott.

2.49. a) Legyen $P_4 = a_{14} \cap a_{24}$ és legyen P_1 az a_{14} egyenes tetszőleges, de P_4-től különböző és a -ra nem illeszkedő pontja. Legyen $a_{12} = P_1A_{12}$ és $P_2 = a_{12} \cap a_{24}$, $a_{23} = P_2A_{23}$, $a_{13} = P_1A_{13}$, végül $P_3 = a_{13}a_{23}$. Könnyű ellenőrizni, hogy az így kapott P_1, P_2, P_3, P_4 pontnégyes teljesíti a feladat feltételeit.

b) A 2.48. feladat állítása szerint A_{34} rögzített, így $P_4 = a_{14} \cap a_{24}$ révén az $a_{34} = P_4A_{34}$ egyenes is fix, ezen van P_3. Itt lényegében bárhol lehet, mert az a)-ban leírt szerkesztés $P_1 \in a_{14}$ kezdeti felvétele helyett $P_3 \in a_{34}$ kezdeti felvételével is elmondható.

2.50. A 2.48. feladat állítására vezetjük vissza a feladatot. Ebből a célból átbetűzzük az ábrát:

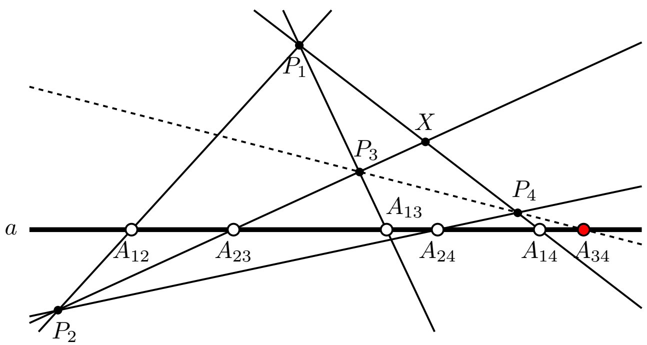
$$A_1 = P_2, \qquad A_2 = P_2', \qquad B_1 = P_3, \qquad B_2 = P_3', \qquad C_1 = P_4, \qquad C_2 = P_4',$$

míg $P_1 = A_1A_2 \cap B_1B_2$ és

$$P_iP_j = a_{ij}, \qquad P_i'P_j' = a_{ij}' \qquad (1 \le i < j \le 4),$$

továbbá

$$A_1B_1 \cap A_2B_2 = a_{23} \cap a_{23}' = A_{23}, \qquad A_1C_1 \cap A_2C_2 = a_{24} \cap a_{24}' = A_{24}, \qquad A_{23}A_{24} = a.$$



2.48M.2. ábra.

Ha a két háromszög pontra nézve perspektív, akkor $P_1 \in C_1C_2$ és így a

$$P_iP_j \cap a = a_{ij} \cap a = A_{ij} \qquad (1 \le i < j \le 4)$$

és a

$$P_i'P_j' \cap a = a_{ij}' \cap a = A_{ij}' \qquad (1 \le i < j \le 4)$$

pontok megegyeznek egymással a hat esetből öt esetben, csak A_{34} és A_{34}' egybeesése nem adódik a feladat feltételeiből illetve a fenti definíciókból. A 2.48. feladat állítása szerint azonban az első öt pont egybeeséséből A_{34} és A_{34}' egybeesése következik, azaz B_1C_1 és B_2C_2 az a egyenesen metszik egymást. Ezt kellett igazolnunk.

Ha a két háromszög egyenesre nézve perspektív, akkor $B_1C_1 \cap B_2C_2 = P_3P_4 \cap P_2'P_4' \in a$ és így a fenti A_{ij}, A_{ij}' pontok megegyeznek egymással öt esetben, csak A_{14} és A_{14}' egybeesése nem adódik a feladat feltételeiből illetve a fenti definíciókból. A 2.48. feladat állítása szerint azonban öt pont egybeeséséből A_{14} és A_{14}' egybeesése következik, azaz P_1C_1 és P_1C_2 az a egyenest a közös $A_{14} = A_{14}'$ pontban metszi, tehát C_1 és C_2 is a P_1A_{14} egyenesen van. Ezt kellett igazolnunk.

2.52. Jelölje az AB oldalegyenes ideális pontját I, a beírt kör és az AC oldal érintési pontját H. Azt szeretnénk megmutatni, hogy D a KL szakasz felezőpontja, azaz $(KLDI) = -1$. Az AB egyenest E-ből a beírt körre vetítjük, majd a beírt kört A-ból önmagára vetítjük:

$$(KLDI) \stackrel{E}{=} (FGDH) \stackrel{A}{=} (GFDH). \qquad (1)$$

Másrészt algebrai azonosság szerint $(GFDH) = \frac{1}{(FGDH)}$, így az 1 kettősviszony értéke (-1), ahogy azt állítottuk is.

2.63. Lásd [5][1968/9/30.o., P. 3.]

2.64. a) A szabályos 13-szög csúcsai között összesen hatféle hosszúság fordul elő, így legfeljebb négy csúcs választható ki, hiszen $\binom{4}{2} = 6 < \binom{n}{2}$, ha $4 < n$. Négy csúcs kiválasztható, pl a csúcsok egy körüljárás szerinti sorszámai: 0, 1, 4, 6.

b) Igen. Pl. a csúcsok sorszámai: 0, 1, 4 illetve 0, 2, 7.

2.67. a) $b = \frac{\lambda\binom{n}{2}}{\binom{k}{2}}$.

b) $r = \frac{\lambda(n-1)}{k-1}$

d) Számoljuk össze kétféleképpen azokat a blokkpárokat (egyenespárokat), amelyeknek van közös eleme (metszéspontja).

Egyrészt b blokk van, így a metsző párok száma legfeljebb $\binom{b}{2}$, és ha ennyi metsző pár van, akkor bármely két blokk metszi egymást, így a blokkrendszer projektív síkot.

Másrészt egy pontban r egyenes találkozik, tehát pontonként $\binom{r}{2}$ pártalálkozás van, összesen pedig $v\binom{r}{2}$. Ha a kétféle számolást összevetjük és felhasználjuk az a), b) feladatrészben kapott összefüggéseket és átszorzás után egyszerűsítünk a $(v-k)>0$ tényezővel, akkor a kívánt egyenlőtlenséghez jutunk.

e) Igaz.

f) Az alábbi táblázat a lehetséges eseteket foglalja össze. A táblázat egy-egy oszlopában egy-egy lehetséges v értéket (pontok száma) vizsgálunk, 6 ponttól 31-ig.

		6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
		15	21	28	36	45	55	66	78	91	105	120	136	153
3	3	-	1	-	2	-	X	-	3	-	4	-	X	-
4	6	-	X	-	-	X	-	-	10	-	-	11	-	-
5	10	-	-	-	X	-	-	-	X	-	-	-	X	-
6	15	16	-	-	-	-	X	-	-	-	-	17	-	-

		19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31
		171	190	210	231	253	276	300	325	351	378	409	435	462
3	3	5	-	6	-	X	-	7	-	8	-	X	-	9
4	6	X	-	-	X	-	-	12	-	-	13	-	-	X
5	10	-	-	14	-	-	-	15	-	-	-	X	-	-
6	15	-	-	18	-	-	-	-	X	-	-	-	-	19

Egy-egy sor a blokk egy-egy lehetséges méretének felel meg 3-tól 6-ig. A „-” jelet tettük egy mezőbe, ha a $(k-1)|(v-1)$ feltétel miatt kiesik az a lehetőség, míg „X” mutatja, hogy a $\binom{k}{2}|\binom{n}{2}$ feltétel az akadály. A megmaradt helyekre egy-egy számot, az eset sorszámát írtuk, később eszerint vesszük végig a lehetőségeket. A táblázatból kimaradtak a 6-nál hosszabb blokkoknak megfelelő esetek, de ezeknél minden eset kizárható az említett két feltétel miatt. 6-nál kevesebb ponttal nincs nemtriviális blokkrendszer.

A táblázatból kiolvasható esetek:

1. eset: $(7,3,1)$ - a kételemű test feletti projektív sík, a Fano sík. Jelben: $\mathbb{P}G(2{,}2)$.

2. eset: $(9,3,1)$ - a háromelemű test feletti affin sík. Jelben: $\mathbb{A}G(2{,}3)$.

3. eset: $(13,3,1)$, $r=6$, $b=26$. Vegyünk egy szabályos 13-szöget és csúcsai közül két háromszöget, melyek összesen hat oldala mind különböző hosszú. Legyenek a blokkok ezek a háromszögek és elforgatottjaik.

4. eset: $(15,3,1)$, $r=7$, $b=35$. Legyenek a pontok egy teljes hatszög-gráf élei. Három él tartozzon egy blokkba, ha háromszöget alkot vagy ha hat különböző végpontja van.

5. eset: $(19,3,1)$, $r=9$, $b=57$.Vegyünk egy szabályos 19-szöget és csúcsai közül három háromszöget, melyek összesen kilenc oldala mind különböző hosszú (a csúcsok sorszámai lehetnek pl 0, 1, 5 és 0, 2, 8 illetve 0, 9, 12). Legyenek a blokkok ezek a háromszögek és elforgatottjaik.

6. eset: $(21,3,1)$, $r=10$, $b=70$. Vegyünk három Fano síkot: P_0, P_1, …, P_6, Q_0, Q_1, …, Q_6, R_0, R_1, …, R_6. A blokkok álljanak egyrészt azokból a hármasokból, amelyek betűjele azonos és saját projektív síkjukon egy egyenesen vannak, másrészt azokból, amelyek három különböző betűt tartalmaznak és indexeik összege 0-val kongruens (mod 3).

7. eset: $(25,3,1)$, $r=12$, $b=100$. Vegyünk egy szabályos 25-szöget és csúcsai közül négy háromszöget, melyek összesen 12 oldala mind különböző hosszú. A csúcsok sorszámai lehetnek pl (0, 1, 6), (0, 2, 9), (0, 3, 11) és (0, 4, 11). Legyenek a blokkok ezek a háromszögek és elforgatottjaik.

8. eset: $(27,3,1)$, $r=13$, $b=117$. A háromelemű test feletti affin tér: $\mathbb{A}G(3{,}3)$. Másképp: Vegyünk három $\mathbb{A}G(2,3)$ síkot: P_0, P_1, …, P_8, Q_0, Q_1, …, Q_8, R_0, R_1, …, R_8. A blokkok álljanak egyrészt azokból a hármasokból, amelyek betűjele azonos és saját affin síkjukon egy egyenesen vannak, másrészt azokból, amelyek három különböző betűt tartalmaznak és indexeik összege 0-val kongruens (mod 3).

9. eset: $(31,3,1)$, $r=15$, $b=155$. Vegyünk egy szabályos 31-szöget és csúcsai közül öt háromszöget, melyek összesen 15 oldala mind különböző hosszú. A csúcsok sorszámai lehetnek pl (0, 1, 5), (0, 2, 16), (0, 3, 11), (0, 6, 13) és (0, 9, 19). Legyenek a blokkok ezek a háromszögek és elforgatottjaik.

10. eset: $(13,4,1)$, $r=4$, $b=13$. $\mathbb{P}G(2{,}3)$.

11. eset: $(16,4,1)$, $r=5$, $b=20$. $\mathbb{A}G(2{,}4)$.

12. eset: $(25,4,1)$, $r=8$, $b=100$.??

13. eset: $(28,4,1)$, $r=9$, $b=126$.??

14. eset: $(21,5,1)$, $r=5$, $b=21$. $\mathbb{P}G(2{,}4)$.

15. eset: $(25,5,1)$, $r=6$, $b=30$. $\mathbb{A}G(2{,}5)$.

16. eset: $(6,6,1)$, $r=1$, $b=1$. Triviális dizájn, egy halmaz és egyetlen részhalmaza, önmaga.

17. és 18. eset: A d) feladatrész eredménye miatt nem létezik.

19. eset: $(31,6,1)$, $r=6$, $b=31$. $\mathbb{P}G(2{,}5)$.

3. A gömb geometriája

3.1. Legyen az A pont merőleges vetülete az OBC síkon D, D merőleges vetülete az OB, illetve az OC egyeneseken rendre E és F. Ekkor AE merőleges OB-re, AF pedig OC-re (lásd az 1. ábrát).

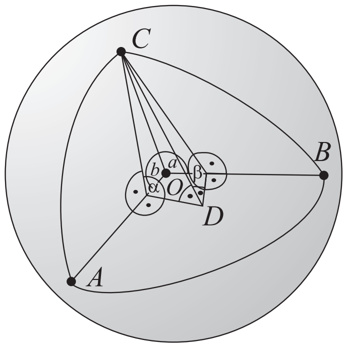
Ebből következően az AE és ED egyenesek párhuzamosak az ABC gömbháromszög c, illetve a oldalának B-beli érintőjével. Így $AED\angle=\beta$. Hasonlóan $AFD\angle=$ $=\gamma$. Tehát az ADE derékszögű háromszögben $\sin\beta=AD/AE$, az ADF derékszögű háromszögben $\sin\gamma=AD/AF$. Ezért $\sin\beta:\sin\gamma=AF:AE$. $AOB\angle=c$ miatt az AOE derékszögű háromszögben $\sin c=AE/AO=AE$, mivel egységsugarú gömböt vizsgálunk. Hasonlóan, $AOC\angle=b$ miatt az AOF derékszögű háromszögben $\sin b=AF/AO=AF$. Tehát $\sin b:\sin c=AF:AE=\sin\beta:\sin\gamma$. A tétel többi része hasonlóan bizonyítható.

3.2. Legyenek a gömb O középpontjából a háromszög A, B, C csúcsaiba mutató vektorok $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ és $\mathbf{c}$. Legyen továbbá $\mathbf{v_b}$ az az egységvektor, mely a gömbháromszög AB oldalszakaszának A-beli érintőfélegyenese irányába mutat. Hasonlóan vegyük fel az AC oldalszakaszt A-ban érintő $\mathbf{v_c}$ egységvektort is.

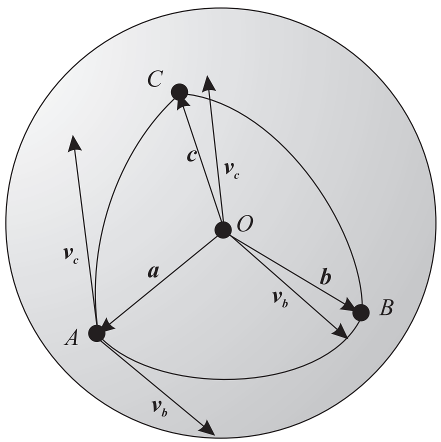
Ekkor a $\mathbf{b}$ vektor az $\mathbf{a}$ vektor c szöggel való elforgatottja a rá merőleges $\mathbf{v_b}$ vektor felé. Így a szögfüggvények definíciója értelmében

$$\mathbf{b} = \cos c\mathbf{a} + \sin c\mathbf{v_b}.$$

Hasonló módon, a $\mathbf{c}$ vektor az $\mathbf{a}$ vektor b szöggel való elforgatottja a rá merőleges



3.1M.1. ábra.



3.2M.1. ábra.

$\mathbf{v_c}$ vektor felé, így

$$\mathbf{c} = \cos b\mathbf{a} + \sin b\mathbf{v_c}.$$

A két vektoregyenletet skalárisan összeszorozva:

$$\mathbf{bc} = (\cos c\mathbf{a} + \sin c\mathbf{v_b})(\cos b\mathbf{a} + \sin b\mathbf{v_c}).$$

A $\mathbf{b}$ és $\mathbf{c}$ egységvektorok szöge a, ezért az egyenlet bal oldalán $\cos a$ szerepel, a jobb oldalon pedig kibonthatjuk a zárójelet:

$$\cos a = \cos b\cos c\mathbf{a}^2 + \cos c\sin b\mathbf{a}\mathbf{v_c} + \sin c\cos b\mathbf{v_b}\mathbf{a} + \sin b\sin c\mathbf{v_b}\mathbf{v_c}.$$

Az $\mathbf{a}$ vektor merőleges $\mathbf{v_b}$-re és $\mathbf{v_c}$-re is, ezért az ezekkel való skaláris szorzata 0, a $\mathbf{v_b}$ és a $\mathbf{v_c}$ egységvektorok szöge pedig α, ezért a skaláris szorzatuk $\cos\alpha$. Tehát

$$\cos a = \cos b\cos c + \sin b\sin c\cos\alpha.$$

3.3. Ha az oldalakra vonatkozó koszinusztételbe behelyettesítjük a $\cos\alpha > -1$ egyenlőtlenséget, akkor a következőt kapjuk:

$$\cos a > \cos b\cos c - \sin b\sin c = \cos(b + c).$$

Mivel $0 < a < \pi$, $0 < b + c < 2\pi$ illetve $\cos a = \cos(2\pi - a)$ és a koszinuszfüggvény szigorúan monoton csökken a $[0; \pi]$ intervallumon, a $[\pi; 2\pi]$ intervallumon pedig szigorúan monoton nő, a fenti egyenlőtlenség csak úgy teljesülhet, hogy $b+c$ értéke a és $2\pi - a$ között van, tehát $a < b+c < 2\pi - a$. Ebből egyrészt $a < b+c$, másrészt $a + b + c < 2\pi$.

3.4. Legyenek az ABC gömbháromszög polárisának csúcsai A^*, B^* és C^*, a gömb középpontja pedig O. Definíció szerint $\overrightarrow{OA}$ merőleges $\overrightarrow{OB^*}$-ra és $\overrightarrow{OC^*}$-ra is, tehát $\overrightarrow{OA}$ az OB^*C^* sík egységnormálisa, továbbá az AA^* gömbi szakasz hossza nagyobb $\pi/2$ -nél, ezért $\overrightarrow{OA}$ az OB^*C^* sík A^*-ot nem tartalmazó félterébe mutat. Így $A^{**} = A$. Hasonlóan belátható, hogy $B^{**} = B$ és $C^{**} = C$, így az $A^*B^*C^*$ gömbháromszög polárisa az ABC gömbháromszög.

3.5. Az AB^*C^* gömbháromszög egyenlő szárú, hiszen $AOB^*\angle = AOC^*\angle = \pi/2$ miatt az AB^* és AC^* oldalszakaszok negyedkörök. A merőlegességek következtében az AB^*, illetve AC^* ívek A-beli érintő egységvektorai az $\vec{OB}^*$, illetve $\vec{OC}^*$ vektorok, így a B^*AC^* gömbi szög nagysága megegyezik a B^*OC^* euklidészi szög nagyságával, azaz a^*-gal.

Az AB^* és AC^* ívek B^*-, illetve C^*-beli érintő egységvektora az $\vec{OA}$, ami merőleges az OB^*C^* síkra, így $AB^*C^*\angle = AC^*B^*\angle = \pi/2$. Hasonlóan látható, hogy az AC^*B és az AB^*C gömbháromszögek is egyenlő szárúak, és az A-nál lévő szögük derékszög (hiszen az $A^*B^*C^*$ gömbháromszög polárisa az ABC gömbháromszög).

Ezek szerint az A csúcsnál lévő teljes gömbi szöget az AB, AC, AB^*, AC^* szakaszok két derékszögre, egy α nagyságú és egy a^* nagyságú szögre osztják. Ebből következően $\alpha + a^* = \pi$. Hasonlóan belátható, hogy $\beta + b^* = \gamma + c^* = \pi$. Az is igaz, hogy a poláris gömbháromszög szögeit az eredeti gömbháromszög meglelő oldalaival összeadva szintén π-t kapunk, hiszen az $A^*B^*C^*$ gömbháromszög polárisa ABC.

3.6. Az $A^*B^*C^*$ poláris gömbháromszögre az oldalakra vonatkozó koszinusztételt felírva a

$$\cos a^* = \cos b^* \cos c^* + \sin b^* \sin c^* \cos \alpha^*$$

egyenlőséghez jutunk. Felhasználva, hogy $a^* = \pi - \alpha, b^* = \pi - \beta, c^* = \pi - \gamma$ és $\alpha^* = \pi - a$:

$$\cos(\pi - \alpha) = \cos(\pi - \beta)\cos(\pi - \gamma) + \sin(\pi - \beta)\sin(\pi - \gamma)\cos(\pi - a)$$

$$-\cos \alpha = \cos \beta \cos \gamma - \sin \beta \sin \gamma \cos a$$

$$\cos \alpha = -\cos \beta \cos \gamma + \sin \beta \sin \gamma \cos a.$$

3.7. Tekintsük azt a gömbháromszöget, amelynek csúcsai Budapest(B), New York(N) és az Északi-sark(E). Legyen $EB = b, EN = n$ és $BN = d$. Tudjuk, hogy $b = 90° - 47.5° = 42{,}5°, n = 90° - 41° = 49°$ illetve $BEN\angle = 19° + 74° = 93°$. Az oldalakra vonatkozó koszinusztétel alapján

$$\cos d = \cos b \cos n + \sin b \sin n \cos BEN\angle$$

$$\cos d = \cos 42{,}5° \cos 49° + \sin 42{,}5° \sin 49° \cos 93°$$

$$\cos d \approx 0{,}457.$$

Innen

$$d \approx 62.81° \approx 1{,}096 rad.$$

Tehát a Budapest-New York távolság megközelítőleg $1{,}096 \cdot 6378 km \approx 6991 km$.

3.8. Bocsássunk merőlegest Oslóból(C) az Egyenlítőre! Legyen a talppont B (keleti hosszúság 11°), a keresett város pedig A. Az ABC gömbháromszög oldalaira és szögeire a szokásos jelöléseket használjuk. Tudjuk, hogy $\beta = 90°$ és azt is, hogy $\gamma = 90°$, hiszen az a oldal észak-déli, a b oldal pedig kelet-nyugati irányú. A szögekre vonatkozó koszinusztételből

$$\cos \alpha = -\cos 90° \cos 90° + \sin 90° \sin 90° \cos a,$$

így

$$\cos \alpha = \cos a,$$

amiből a feltételeket figyelembe véve következik, hogy $\alpha = a$. Így a szinusztétel alapján $\gamma = c$, azaz $c = 90°$. Tehát a keresett egyenlítői város a nyugati hosszúság $90° - 11° = 79°$-án fekszik, így az Ecuador fővárosa, Quito.

3.9. Tekintsük azt a gömbháromszöget, amelynek csúcsai Budapest (B), London (L) és az Északi-sark (E). Legyen $EB = b, EL = l$ és $BL = d$. Tudjuk, hogy $b = 90° - 47{,}5° = 42{,}5°, l = 90° - 51{,}5° = 38{,}5°$ illetve $BEL\angle = 19°$. Az oldalakra vonatkozó koszinusztétel alapján

$$\cos d = \cos b \cos l + \sin b \sin l \cos BEL\angle$$

$$\cos d = \cos 42{,}5° \cos 38{,}5° + \sin 42{,}° 5° \sin 38{,}5° \cos 19°$$

$$\cos d \approx 0{,}975,$$

amiből

$$\sin d = \sqrt{1 - \cos^2 d} \approx 0{,}224.$$

A szinusztételt felhasználva

$$\sin EBL\angle = \sin b * \sin BEL\angle / \sin d$$

$$\sin EBL\angle \approx \sin 42{,}5° * \sin 19° / 0{,}224$$

$$\sin EBL\angle \approx 0{,}983.$$

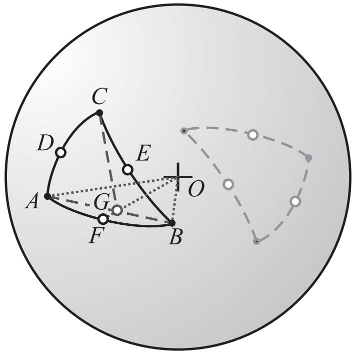
Innen $EBL\angle \approx 79{,}5°$. Tehát a repülőnek az északi iránnyal megközelítőleg 79,5°-ot bezárva kell elindulnia.

3.10. Legyenek a gömbháromszög csúcsi A, B, C, a gömb középpontja O. Legyen az AB ív felezőpontja F, az AB szakaszé G. Az O, G és F pontok egy egyenesen vannak. A gömbháromszög C-ből induló súlyvonala az az ív, amit a gömbfelületből az OCF sík kimetsz. Ez a sík ugyanakkor az ABC síkháromszöget is a C-hez tartozó súlyvonalában (CG) metszi. Hasonlóan láthatjuk, hogy az ABC gömbháromszög másik két súlyvonalának síkja az ABC síkháromszöget a másik két súlyvonalában metszi. Mindhárom súlyvonal síkja illeszkedik tehát az ABC síkháromszög súlypontjára, tehát egy egyenesre illeszkednek. Ez pedig azt jelenti, hogy a gömbháromszög súlyvonalai is egy ponton mennek át, amely nem más, mint a síkháromszög súlypontjának vetülete a gömbfelületre.

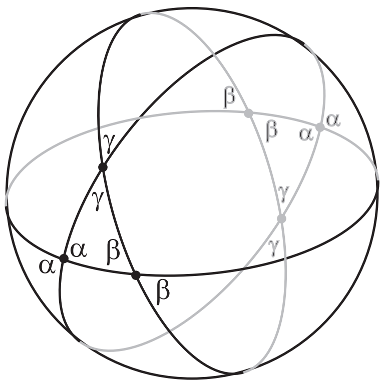
3.11. a) Egy gömbkétszög csúcsai átellenes pontok, mivel csak ekkor húzható köztük több egyenes. Ezért ha a gömbkétszög szöge α, akkor a teljes gömbfelületnek az $\alpha/2\pi$-ed részét foglalja el, tehát a területe: $4\pi * \alpha/2\pi = 2\alpha$.

b) A gömbháromszög oldalegyenesei egymást a gömbháromszögben és az átellenes gömbháromszögében fedő gömbkétszögekre osztják a gömbfelületet. Ezek közül kettő (egymással átellenesen elhelyezkedő) szöge α, kettő szöge β, kettő szöge pedig γ. (lásd az 1. ábrát).

Ha ezeknek a területét összeadjuk, akkor majdnem a teljes gömbfelszínt kapjuk, csak éppen a gömbháromszög területét (T) hatszor számoltuk (háromszor az egyik, háromszor a másik oldalon), tehát néggyel többször, mint ahányszor kellene. Így a



3.10M.1. ábra.



3.11M.1. ábra.

teljes gömbfelszín:

$$4\pi = 2(2\alpha + 2\beta + 2\gamma) - 4T,$$

amiből

$$4T = 4(\alpha + \beta + \gamma) - 4\pi$$
$$T = \alpha + \beta + \gamma - \pi.$$

3.12. Mivel a keresett mértani hely szimmetrikus az AB egyenesre, elég a gömbnek csak az egyik felét vizsgálnunk. Legyen az A pont átellenes pontja A', a B-é B'. Be fogjuk bizonyítani, hogy a megfelelő C pontok mértani helye a félgömbön egy olyan körív, amelynek végpontjai A' és B'.

Legyen C a körív tetszőleges A'-től és B'-től különböző pontja. Tudjuk, hogy az A, C, A', a B, C, B', illetve az A, B, A', B' pontok egy egyenesen vannak. Emiatt $B'A'C\angle(=\alpha') = B'AC\angle = \pi - BAC\angle = \pi - \alpha$, $A'B'C\angle(=\beta') = A'BC\angle = \pi - ABC\angle = \pi - \beta$, valamint $A'CB'\angle(=\gamma') = ACB\angle = \gamma$. Ezek szerint az ABC háromszög területe

$$\alpha + \beta + \gamma - \pi = \pi - \alpha' + \pi - \beta' + \gamma' - \pi = \pi - (\alpha' + \beta' - \gamma').$$

Ez pedig akkor állandó, ha $\alpha' + \beta' - \gamma'$ állandó. Tehát azt kell igazolnunk, hogy a gömbön adott A', B' pontokhoz azon C pontok mértani helye az egyik félgömbön, amelyekre $B'A'C\angle + A'B'C\angle - A'CB'\angle$ állandó, egy A' és B' között húzódó körív. Ez az állítás az euklidészi geometriában is igaz (ott az egyik félgömb helyett az egyik félsíkot vizsgáljuk), és a bizonyítása is ugyanúgy elmondható:

Legyen a körív (gömbi) középpontja O. Ha O az $A'B'C$ háromszög belsejében helyezkedik el, akkor

$$\alpha' + \beta' - \gamma' = (B'A'O\angle + OA'C\angle) + (A'B'O\angle + OB'C\angle) - (OCA'\angle + OCB'\angle) =$$
$$= B'A'O\angle + A'B'O\angle$$

(hiszen az $OA'C$ és $OB'C$ háromszögek egyenlő szárúak), ami pedig független attól, hogy a C pont hol helyezkedik el a köríven. Ha O az $A'C$ vagy a $B'C$ szakaszon van, akkor könnyen belátható, hogy $\alpha' + \beta' - \gamma'$ szintén $B'A'O\angle + A'B'O\angle$-gel egyenlő. Ha pedig O az $A'B'C$ háromszögön kívül van, akkor szintén

$$\alpha' + \beta' - \gamma' = (B'A'O\angle + OA'C\angle) + (A'B'O\angle - OB'C\angle) - (OCA'\angle - OCB'\angle) =$$
$$= B'A'O\angle + A'B'O\angle.$$

Ezzel az állítást bebizonyítottuk, tehát a kersett C pontok mértani helye az egyik félgömbön valóban egy A' és B' között húzódó körív, így a teljes gömbön egy körívpár. (Más helyeken lévő C pontok biztosan nem felelnek meg a feltételnek, hiszen könnyen belátható, hogy akkor az ABC háromszög területe vagy nagyobb, vagy kisebb lesz.)

4. A hiperbolikus sík Poincaré-modellje

5. Vegyes feladatok

5.2.

1. megoldás. A bizonyítást az alábbi Lemmára alapozzuk.

Lemma A k_{XYU}, $k_{X'Y'U}$ körök pontosan akkor érintik egymást U-ban, ha

$$XYU\sphericalangle + UY'X'\sphericalangle \equiv XUX'\sphericalangle \pmod{180^\circ}. \tag{1}$$

Ezt a lemmát a G.II.6.34. feladat **??** megoldásában már használtuk és igazoltuk is.

Most a k_{ABP}, k_{CDP} körök P-ben érintik egymást, tehát

$$CDP\sphericalangle + PAB\sphericalangle \equiv CPB\sphericalangle \pmod{180^\circ}. \tag{2}$$

és azt szeretnénk igazolni, hogy a $k_{ABP'}$, $k_{CDP'}$ körök P'-ben érintik egymást, tehát

$$CDP'\sphericalangle + P'AB\sphericalangle \equiv CP'B\sphericalangle \pmod{180^\circ}. \tag{3}$$

Vegyük észre, hogy

$$CDP'\sphericalangle \equiv CDP\sphericalangle + PDP'\sphericalangle \pmod{180^\circ}, \tag{4}$$

míg

$$P'AB\sphericalangle \equiv PAB\sphericalangle - PAP'\sphericalangle \pmod{180^\circ}, \tag{5}$$

és a $k_{DPP'A}$ körben

$$PDP'\sphericalangle \equiv PAP'\sphericalangle \pmod{180^\circ}, \tag{6}$$

így (4), (5) és (6) összege (2) figyelembevételével épp a bizonyítandó (3) összefüggést adja.

2. megoldás. Az Állítás P centrumú inverzióval igazolható. Ilyen inverziónál a k_{ABP}, k_{CDP} körök képei párhuzamos egyenesek, tehát az A, B, C, D pontok A^*, B^*, C^*, D^* képei trapézt alkotnak, melyben A^*B^* és C^*D^* az alapok, P'^* pedig az átlók vagy a szárak egyeneseinek metszéspontja, így a $k_{ABP'}$, $k_{CDP'}$ körök képei valóban érintik egymást P' képében, hiszen onnan egymásba nagyíthatók.

5.3.

1. megoldás. Legyen az A középpontú AC sugarú és B középpontú BC sugarú körök másik metszéspontja O pont.

Első észrevételünk, hogy az A, M, L illetve a B, M, K pontok egy-egy egyenesre esnek. Amennyiben a feladat állítása igaz, úgy az M középpontú MK sugarú kör belülről érinti a k_A, k_B köröket. Az állítást tehát átfogalmazhatjuk úgy, hogy tetszőleges olyan körre, amely belülről érinti a k_A, k_B köröket és érintési pontja k_A-val K pont, k_B-vel L pont, teljesül, hogy a BK és AL egyenesek X metszéspontja a két kör közös CO húrjára esik. (Lásd az 1. ábrát!)

Alkalmazzunk O középpontú körre vonatkozó inverziót! Az OC egyenes átmegy az inverzió centrumán, tehát a C pont képe az OC félegyenesre eső C' pont. Mivel a k_A és k_B körök átmennek az inverzió centrumán és egymást merőlegesen metszik, ezért képük két egymásra merőleges egyenes, amelyek metszéspontja a közös C pont C' képe. Az M középpontú MK sugarú k kör nem megy át az inverzió centrumán, ezért képe k' kör, amely érinti a k_A és k_B körök képeit. Ez tehát egy olyan kör lesz, amely K' és L' pontokban érinti a k'_A és k'_B egymásra merőleges egyeneseket. Azon fog múlni a bizonyítás, hogy a $C'L'$, $C'K'$ szakaszok a k' kör érintői, tehát egymással egyenlő hosszúságúak. Alább ezt a közös hosszt u jelöli.

Az AK és BL egyenesek nem mennek át az inverzió O középpontján, így képük egy-egy O-n átmenő kör lesz. Az AK a' képe átmegy az A', K', O pontokon, a BL egyenes b' képe pedig az L', B', O pontokon. (Lásd a 2. ábrát!)

Azt kell igazolni, hogy X' rajta van a $C'O$ egyenesen.

Ehhez felhasználjuk a következő ismert feladat eredményét. Legyenek P és Q a sík rögzített pontjai. Azon R pontok mértani helye a síkon, amelyekre $PR^2 - QR^2$ egy előre adott állandó, PQ-ra merőleges egyenes.

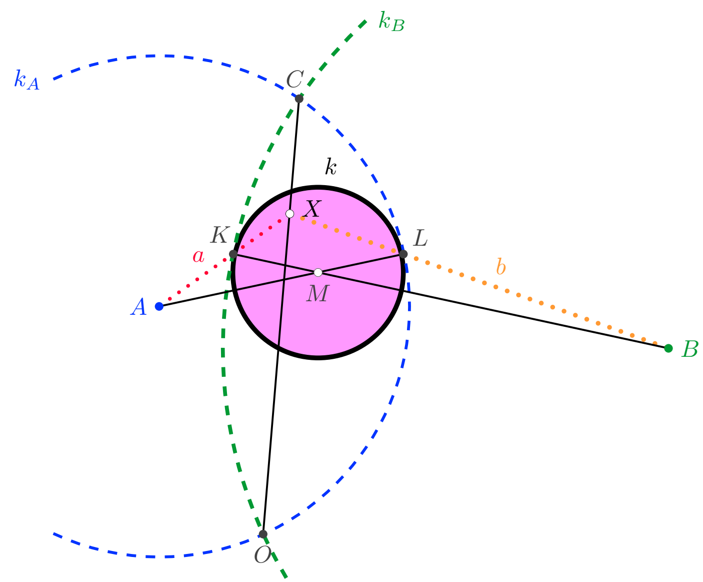
Ennek megfelelően legyen most a feladatunkban $P = O_a$ az a' kör, $Q = O_b$ pedig a b' kör középpontja. Az $A'O$ szakasz felezőpontja rajta van k'_A egyenesen, mert éppen az O pont A-ra vonatkozó tükörképének inverz képe. Így a körök merőlegessége miatt O_a a k'_A egyenesre, míg O_b a k'_B egyenesre illeszkedik.

A körök metszéspontjai O és X', tehát $O_aX'^2 - O_bX'^2 = O_aO^2 - O_bO^2$. Most O helyett válaszhatjuk a körök egy-egy különböző pontját.

$$O_aO^2 - O_bO^2 = O_aL'^2 - O_bK'^2 = O_aC'^2 + u^2 - (O_bC'^2 + u^2) = O_aC'^2 - O_bC'^2.$$

Tehát X', C', O egyenesen vannak, ennek megfelelően C, O, X is egy egyenesen vannak. Az állítást igazoltuk.

2. megoldás. Legyen ábránk betűzése az első megoldás szerinti. AZ AX félegyenes a k_B kört másodszor a K' pontban, BX félegyenes a k_A kört másodszor az L'



5.3M1.1. ábra.

pontban metszi. (Lásd az 1. ábrát!)

A KK' és CO húrok metszéspontja a k_B körben az X pont. Ezért az X pontra vonatkozó hatvány ebben a körben

$$KX \cdot XK' = CX \cdot XO.$$

Másrészt a k_A körben LL' és CO húrok metszéspontja szintén X pont. Az X-re vonatkozó hatvány ebben a körben

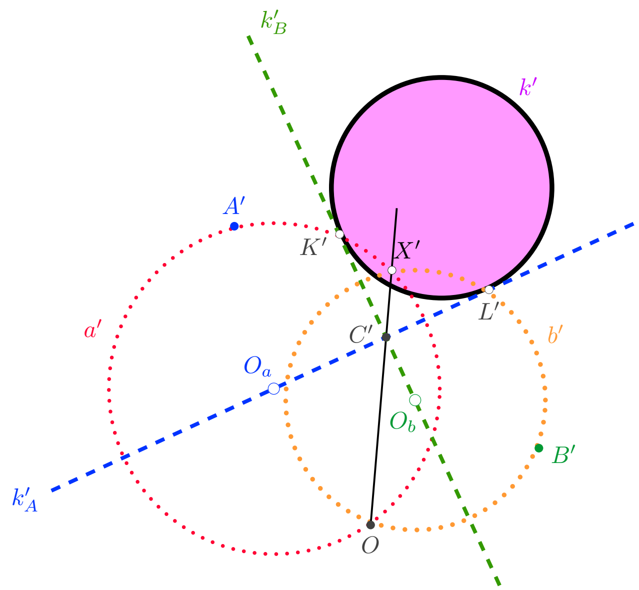
$$LX \cdot XL' = CX \cdot XO.$$

Látjuk, hogy

$$KX \cdot XK' = LX \cdot XL',$$

tehát a K, L, L', K' pontok egy körön, a k körön helyezkednek el. Az A pont k körre és k_B körre vonatkozó hatványa megegyezik, továbbá a k_A és k_B körök merőlegessége miatt AC érinti a k_B kört. Ezek alapján

$$AK \cdot AK' = AC^2 = AL^2,$$



5.3M1.2. ábra.

tehát AL érinti a k kört. Hasonlóan igazolható, hogy BK érinti a k kört. A két érintő metszéspontjából, M-ből a k körhöz húzott két érintőszakasz MK és ML egyenlők.

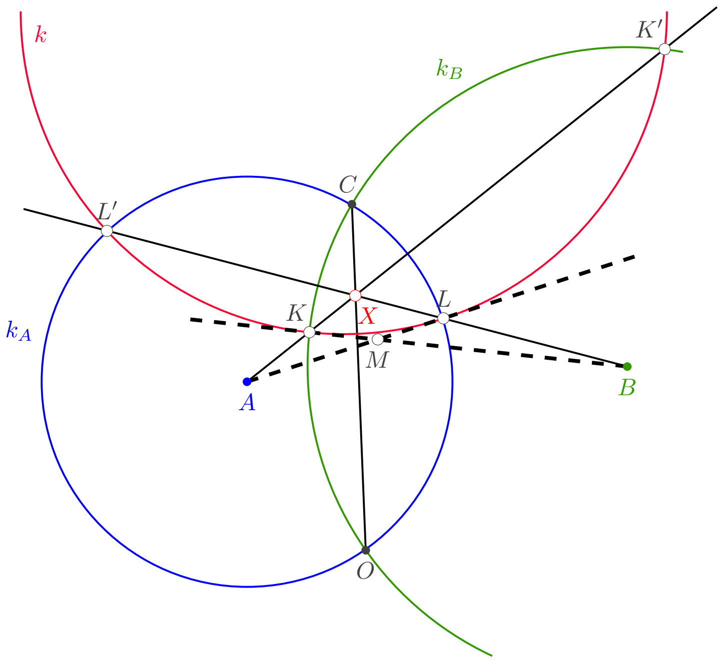
5.4. Legyen k_1, k_2 ill. k_3 középpontja O_1, O_2 ill. O_3. Meg fogjuk mutatni, hogy ha $e_1 \cap e_2 \cap e_3 = E$ és $f_1 \cap f_2 \cap f_3 = F$ közül bármelyik létezik, akkor a másik is létezik és egymás izogonális konjugáltjai az $O_1O_2O_3$ háromszögre vonatkozóan.

Tegyük fel pl., hogy E létezik és jelölje az EO_1, EO_2, EO_3 egyeneseket t_1, t_2, t_3, az O_2O_3, O_3O_1, O_1O_2 centrálisokat u_1, u_2, u_3, az $O_1O_2O_3$ háromszög szögfelezőit v_1, v_2, v_3 (lásd az 1. ábrát). Alább az e egyenes t tengelyre vonatkozó tükörképét $t(e)$ jelöli. Tehát a szimmetria miatt pl.

$$v_1(u_2) = u_3, \qquad v_2(u_3) = u_1, \qquad v_3(u_1) = u_2. \tag{1}$$

Meg fogjuk mutatni, hogy az

$$\begin{array}{lll} u_1(e_1) = f_1, & u_2(e_2) = f_2, & u_3(e_3) = f_3, \\ v_1(t_1) = \tau_1, & v_2(t_2) = \tau_2, & v_3(t_3) = \tau_3 \end{array} \tag{2}$$



5.3M2.1. ábra.

hat egyenes mind egy közös ponton halad át, sőt kicsit több is igaz, f_1, f_2, f_3 páronkénti szögfelezői a τ_1, τ_2, τ_3 egyenesek.

Az alábbi összefüggéseket használjuk fel:

Lemma 1. Ha a v, t, τ egyenesekre $v(t) = \tau$, akkor a τ-ra vonatkozó tükrüzés, mint transzformáció így írható: $\tau = v \circ t \circ v$

Lemma 2. Ha t, u, v közös ponton átmenő tengelyek, akkor $t \circ v \circ u \circ t = u \circ v$.

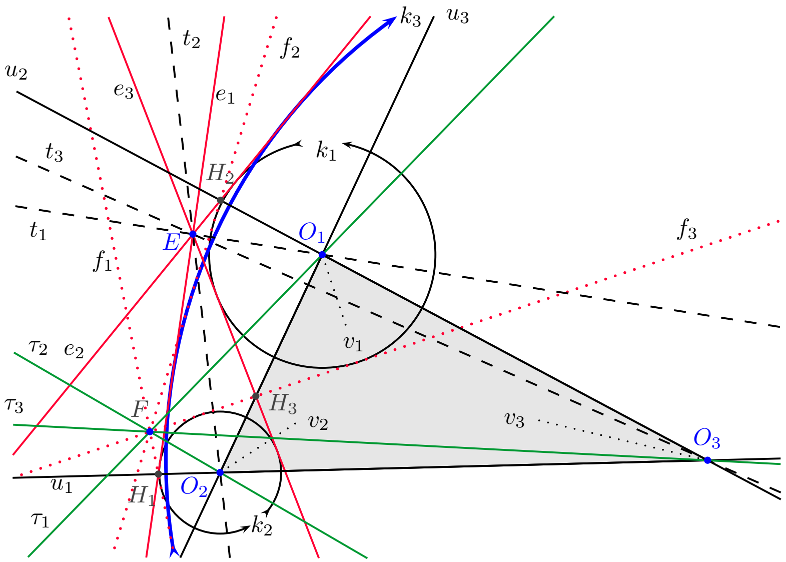
Észrevétel 1. Mivel t_1, t_2 és t_3 metszéspontja E, így (2) második sorának egyenesei az E pont $O_1O_2O_3$ háromszögre vonatkozó izogonális konjugáltjában (lásd a G.II.11.12., G.II.16.16. feladatokat) metszik egymást.

Adott pontból adott ciklushoz húzott két érintő (antiérintő) szimmetrikus a pontot a ciklus középpontjával összekötő egyenesre, így

$$t_1(e_3) = e_2, \qquad t_3(e_2) = e_1, \qquad t_2(e_1) = e_3. \tag{3}$$

Ebből, a fenti lemmákból és (1)-ből következik, hogy

$$\tau_1(f_2) = f_3, \qquad \tau_2(f_3) = f_1, \qquad \tau_3(f_1) = f_2, \tag{4}$$



5.4M.1. ábra.

hiszen pl

$$\tau_1(f_2) = v_1 \circ t_1 \circ v_1(f_2) = v_1 \circ t_1 \circ v_1 \circ u_2(e_2) =$$
$$= v_1 \circ t_1 \circ v_1 \circ u_2 \circ t_1(e_3) = v_1 \circ u_2 \circ v_1(e_3) = u_3(e_3) = f_3.$$

Ez azt is jelenti, hogy f_2, f_3 és τ_1 egy ponton megy át, sőt f_3, f_1 és τ_2, valamint f_1, f_2 és τ_3 is egy ponton megy át. Ha ez a három közös pont nem mind azonos, akkor az f_1, f_2, f_3 egyenesek alkotta Δ háromszög pontra nézve perspektív az $O_1O_2O_3$ háromszöggel, a perspektivitás középpontja az Észrevétel 1.-ben említett izogonális konjugált. Desargues tétele szerint e két háromszögnek egyenesre nézve is perspektívnek kellene lennie, azaz az

$$f_1 \cap u_1 = e_1 \cap u_1 = H_1, \qquad f_2 \cap u_2 = e_2 \cap u_2 = H_2, \qquad f_3 \cap u_3 = e_3 \cap u_3 = H_3$$

pontoknak egy egyenesre kell illeszkednie. Azonban ezek a pontok a k_1, k_2, k_3 irányított körök páronkénti „antihasonlósági pontjai" (pl H_1 a k_2 irányított kör és a k_3 irányított kör ellentettjének hasonlósági pontja), amelyek nincsenek egy egyenesen, ha O_1, O_2, O_3 sincsenek egy egyenesen. Ha O_1, O_2, O_3 egy egyenesen vannak, akkor a közös centrálisra vonatkozó tengelyes szimmetria miatt a feladat állítása nyilvánvalóan teljesül.

5.5.

1. megoldás. Felhasználjuk az alábbi lemmát:

Lemma Az e egyenes pontosan akkor megy át az $I_1I_2I_3$ háromszög magasságpontján, ha e-nek az $I_1I_2I_3$ háromszög oldalaira vonatkozó tükörképei egy ponton mennek át (lásd a **??**.–**??**. feladatokat).

A fenti lemmát itt nem igazoljuk.

Az e egyenesnek az I_1I_2 egyenesre vonatkozó tükörképe a BC egyenes, míg az I_2I_3 egyenesre vonatkozó tükörképe CD, így csak azt kell megmutatni, hogy az e egyenes I_1I_3-ra vonatkozó tükörképe is átmegy C-n. Ezt kétféleképpen is igazoljuk.

I. gondolatmenet

Jelölje a DAM, MAB szögek szögfelezőit t_1 illetve t_2, a CDA, DAB, ABC, BCD szögek szögfelezőit rendre t_D, t_A, t_B illetve t_C. Az utóbbi négy szögfelező rendre DC-t DA-ra, DA-t BA-ra BA-t BC-re illetve BC-t DC-re képezi, míg t_1 a DA-t e-re, míg t_2 az e-t BA-ra viszi.

Ismeretes, hogy $ABCD$ pontosan akkor érintőnégyszög, ha a $t_B \circ t_A \circ t_D \circ t_C$ transzformáció az identitás. Mivel $t_C(C) = C$, így most $t_B \circ t_A \circ t_D(C) = C$. A $t_2 \circ t_1$ forgatás pontosan úgy képezi AD-t AB-re mint t_A, így $t_B \circ t_2 \circ t_1 \circ t_D(C) = = C$, azaz $t_1 \circ t_D(C) = t_2 \circ t_B(C)$. Jelölje ezt az e-n található közös pontot C'. A C' pont tehát a C pont $t_1 \cap t_D = I_3$ körüli elforgatottja, és egyúttal a C pont $t_2 \cap t_B = I_1$ körüli elforgatottja is, azaz $I_3C = I_3C'$ és $I_1C = I_1C'$. Ezek szerint az I_3CI_1, $I_3C'I_1$ háromszögek egybevágók, C' a C tükörképe I_1I_3-ra. Épp ezt akartuk igazolni.

2. megoldás. Az 5.5M1. megoldást folytatjuk másképp.

II. gondolatmenet Legyen $ABCD$ negatív körüljárású, és irányítsuk az ABM, NDA háromszögek k_1, k_2 beírt köreit pozitívan, az $ABCD$ négyszög beírt k_3 körét negatívan. A BA és a CB irányított egyenesek érintik k_1-et és antiérintik k_3-at; a DA, CD irányított egyenesek érintik k_3-at és antiérintik k_2-t míg az $MA = e$ irányított egyenes és még egy f irányított egyenes érintik k_2-t és antiérintik k_1-et.

A BA, DA, $MA = e$ irányított egyenesek az A ponton mennek át, így az 5.4. feladat állítása szerint a CB, CD, f egyenesek is egy ponton mennek át, azaz f átmegy C-n. Az e, f irányított egyenesek érintik k_1-et és antiérintik k_2-t így egyenesük egymás tükörképe a k_1, k_2 körök centrálisára vonatkozólag, azaz f (fordított irányítással) az e egyenes I_1I_2-re vonatkozó tükörképe.

Végülis azt kaptuk, hogy a feladatban A és C egymás izogonális konjugáltjai az I_1I_3I háromszögre vonatkozólag, ahol I az $ABCD$ négyszög beírt körének középpontja.

Segítő lökések

1. Inverzió

1.2. Próbálkozzunk először külső pont képének szerkesztésével! A körzővel elég összesen három ívet rajzolni, már meg is van az inverz kép.

1.3. Osztás helyett többszörözzünk! Lásd még az 1.2. feladatot.

1.7. Lásd az 1.5-1.6. feladatokat!

1.8. Lásd az 1.5-1.7. feladatokat!

1.10. **c)** Alkalmazzuk a szelőtételt (pont körre vonatkozó hatványa)!
d)-e) Használjuk az 1.6. feladat eredményét!

1.22. **a)** Készítsünk vázlatot az egyenesről és a képéről. A kép középpontja melyik pont képe? Szerkesszük meg először azt a pontot!
b) Invertáljuk az egyeneseket körökké, azok metszéspontját szerkesszük meg!
c) Fogalmazzuk meg, mit jelent az, hogy „szerkesztés" (euklideszi szerkesztés)!

1.28. Vizsgáljunk egy L félkört alkotó körre való invertálást!

1.31. Invertáljuk az ábrát egy A középpontú körre!

1.32.

1. segítő kökés. Oldjuk meg először az 5.2. feladatot!

2. segítő kökés. Alkalmazzunk A centrumú inverziót!

1.35. Alkalmazzunk inverziót, melynek centruma a két adott kör érintési pontja!

1.38. Számoljuk le a metszéspontokat!

1.42.

1. segítő kökés. Vigyázat, a tétel teljes általánosságban nem igaz! Egymáson kívül elhelyezkedő köröknél keressünk egyenlő szögeket és igazoljuk, hogy a $P_{12}P_{23}P_{34}P_{41}$ négyszög egymással szemközti szögeinek összege egyenlő.

2. segítő kökés. Alkalmazzunk P_{12} centrumú inverziót!

3. segítő kökés. Először oldjuk meg a **??**. feladatot!

1.46.

1. segítő kökés. Invertáljuk az ábrát egy A centrumú inverzióval!

2. segítő kökés. Invertáljuk az ábrát K-ra!

3. segítő kökés. Sejtsük meg melyik az a pont!

1.50. Lásd az 1.19-1.23. feladatokat!

1.54. Lásd az 1.51. feladatot!

1.70. Lásd az 1.21. feladatot!

2. Projektív geometria

2.10. A távolságok és szögek közti közvetítésre használjuk a területet!

2.11. Lásd a 2.10. feladat állítását!

2.16. Az $ABCD$ egyenesre nem illeszkedő öt további megfelelő pont felvételével megoldható az a), öt másikkal a b) feladat is.

2.23. Fejezzük ki $(ABDC)$, $(BACD)$, $(ACBD)$ értékeket x-szel,a többit próbáljuk ezekből kifejezni.

2.24. **1.** Legyen először $\underline{a} = \overrightarrow{OA}$ és $\underline{b} = \overrightarrow{OB}$. Mutassuk meg, hogy ha $\underline{c} = \overrightarrow{OC}$ és $\underline{c} = \alpha\underline{a} + \beta\underline{b}$ akkor $(ABC) = \frac{AC}{CB} = \frac{\beta}{\alpha}$.
2. Sejtsük meg az $(ABCD)$ kettősviszonyra vonatkozó képletet!
3. Mutassuk meg 1.1. alapján, hogy a képlet $\underline{a} = \overrightarrow{OA}$, $\underline{b} = \overrightarrow{OB}$, $\underline{c} = \overrightarrow{OC}$ és $\underline{d} = \overrightarrow{OD}$ esetén teljesül és vizsgáljuk a α_1, β_1, α_2, β_2 értékek változását, amint az $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$, $\underline{d}$ vektorokat számszorosaikra cseréljük!

2.27. Igazoltuk, hogy a köri pontnégyes komplex kettősviszonya valós értékű, így elég annak abszolút értékét meghatározni. Használjuk a Nagy Szinusz Tételt!

2.39. Használjuk a görbék egyenletének kétabszcisszás alakját! Legyen adva a HK egyenes és az azzal nem párhuzamos e egyenes. Messe a görbe P pontján átmenő, e-vel párhuzamos egyenes a HK egyenest a Q pontban. Ha valamely μ^2 konstanssal

$$\mu^2 \cdot MH \cdot MK = MP^2, \tag{1}$$

és M mindig a HK szakaszon fekszik, akkor az 1. összefüggésnek eleget tevő P pontok halmaza ellipszis, míg ha M a H, K pontokban vagy a HK szakaszon kívül helyezkedik el, akkor hiperbola a mértani hely, míg az

$$\mu^2 \cdot MK = MP^2, \tag{2}$$

egyenletnek eleget tevő P pontok halmaza parabola.

2.41. Legyen a kúpcsúcsa A és az alapkör t-re merőleges BC átmérőegyenese messe t-t T-ben. A 2.39., 2.40. feladatok megoldásának alapján mutassuk meg, hogy $TB \cdot TC = TA^2$.

2.46.

1. segítő kökés. Keressük meg a π leképezés fixpontjait! Számoljunk kettősviszonyokkal!

2. segítő kökés. Vetítsük át a síkot úgy, hogy kényelmesebb legyen az ábra!

2.47. Használjuk fel, hogy a kettősviszony változatlan marad.

2.48. c) Dolgozzunk vetítésekkel és kettősviszonyokkal! Mutassuk meg például, hogy $(A_{23}A_{14}A_{12}A_{24}) = (A_{23}A_{14}A_{13}A_{34})$!

2.50.

1. segítő kökés. Tekintsük Papposz feladatát (2.49. feladat), két lehetséges $P_1P_2P_3$ háromszöget.

2. segítő kökés. Lépjünk ki a térbe!

2.51. Vetítsük át az a egyenest γ-n át a b egyenesre, majd a b egyenest α-n át c-re és tekintsük e két vetítés kompozícióját!

2.62. Részletesebben, lásd Montágh Balázs cikkét[1].

1. Szervezzünk meg először 9 versenyző közt hármas futamokkal bajnokságot! Most lehetőségünk van geometriai megoldást találni. Azonosítsuk a versenyzőket a sík (x, y) pontjainak, ahol x és y egész számok és modulo 3 tekintjük őket (azaz a versenyzőket a kilenc elemű $\mathbb{F}_3 \times \mathbb{F}_3$ halmaz elemeinek feleltetjük meg). A futamok a sík egész együtthatós egyeneseinek felelnek meg az alábbi módon.

12 futamot szervezünk. A c számnak háromféle „értéke” lehet modulo 3, az (a, b) számpárnak pedig összesen kilencféle. Egyenesnek tekintjük az

$$y \equiv c \pmod 3 \qquad y \equiv ax + b \pmod 3 \tag{1}$$

kongruenciák megoldáshalmazait (azaz $\mathbb{F}_3$-ban az $y = c$, $c = ax + b$ egyenletek megoldáshalmazait).

Mutassuk meg, hogy a (1) kongruenciák közül bármelyik kettőnek pontosan egy közös megoldása van.

2. Adjunk meg négyelemű testet!

3. Szervezzük meg a beosztást a négyelemű test segítségével!

3. A gömb geometriája

3.1. Bocsássunk merőlegest például az A csúcsból az OBC síkra, majd ebből a pontból az OB és az OC egyenesekre. A létrejövő derékszögű háromszögek megfelelő szögének szinuszát felírva adódik az állítás.

3.2. Legyenek a gömb O középpontjából a háromszög A, B, C csúcsaiba mutató vektorok $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ és $\mathbf{c}$. Legyen továbbá $\mathbf{v_b}$ az az egységvektor, mely a gömbháromszög AB oldalszakaszának A-beli érintőfélegyenese irányába mutat. Hasonlóan vegyük fel az AC oldalszakaszt A-ban érintő $\mathbf{v_c}$ egységvektort is. Írjuk fel a $\mathbf{b}$ és a $\mathbf{c}$ vektorokat $\mathbf{a}, \mathbf{v_b}$, illetve $\mathbf{v_c}$ segítségével. Akapott egyenletekből előállítható a bizonyítandó tétel.

3.3. Használjuk az oldalakra vonatkozó koszinusztételt! Csináljunk belőle egyenlőtlenséget!

3.5. Az A csúcsnál lévő teljes gömbi szöget az AB, AC, AB^*, AC^* szakaszok négy részre osztják. Számoljuk ki az egyes részek nagyságát! Mit mondhatunk az AB^* $*C^*$, az AC^*B, illetve az AB^*C gömbháromszögekről?

3.6. Alkalmazzuk a poláris gömbháromszögre az eddig megismert (oldalakra vonatkozó) koszinusztételt, és nézzük meg, hogy ez mit jelent az eredeti háromszögre vonatkozóan.

3.7. Keressünk a Földön egy harmadik pontot úgy, hogy a három pont alkotta gömbháromszögnek ismerjük három adatát (oldalak, szögek)! Ezekből az ismert tételek segítségével kiszámítható a kérdéses oldal hossza.

3.8. Keressünk a Földön egy harmadik pontot úgy, hogy a három pont alkotta gömbháromszögnek ismerjük három adatát (oldalak, szögek)! Ezekből az ismert tételek segítségével kiszámítható a kérdéses csúcs helyzete.

3.9. Keressünk a Földön egy harmadik pontot úgy, hogy a három pont alkotta gömbháromszögnek ismerjük három adatát (oldalak, szögek)! Ezekből az ismert tételek segítségével kiszámítható a kérdéses szög nagysága.

3.10. Vizsgáljuk meg, milyen viszonyban vannak a gömbháromszög súlyvonalai a gömbháromszög csúcsai alkotta síkháromszög súlyvonalaival.

3.11. b) Rajzoljuk meg a gömbháromszög oldalegyeneseit! Ezek a gömbfelületet egymást fedő gömbkétszögekre osztják. Ezek, illetve a teljes gömbfelszín területének ismeretében adódik a gömbháromszög területe.

3.12. Nyílvánvaló, hogy a keresett mértani hely szimmetrikus az AB gömbi egyenesre, ezért vizsgáljuk csak az egyik félgömböt! A keresett mértani helynek mindig tartalmaznia kell az A és a B pontok átellenes pontját (A' és B'), hiszen az AA', illetve a BB' gömbi egyenesek tetszőleges szögben hajolhatnak AB-hez, így az ABA' és az ABB' gömbháromszögek területe tetszőleges lehet. Innen megsejthető, hogy a megfelelő C pontok mértani helye az egyik félgömbön egy, az A' és B' pontokon átmenő körív.

4. A hiperbolikus sík Poincaré-modellje

5. Vegyes feladatok

5.2.

1. segítő kökés. Lásd a G.II.6.34. feladatot!

2. segítő kökés. Alkalmazzunk P centrumú inverziót!

Irodalomjegyzék

[1] Hraskó András (szerk.): *Új matematikai mozaik.* Budapest, 2002, Typotex kiadó, Budapest. ISBN 963 9326 41 0. Szabadon elérhető ebook-ként a http://www.hik.hu/tankonyvtar/site/books/b124/index.html címen.

[2] John Casey: *A Sequel To The First Six Books Of The Elements Of Euclid.* 3. kiad. Dublin, 1885, Hodges and Figgis and Co., Grafton-St. Szabadon letölthető: http://www.gutenberg.org/etext/21076.

[3] Hubai Tamás diák, 2005c. Fővárosi Fazekas Mihály Gimnázium.

[4] Kürschák József Matematikai Verseny. URL `http://matek.fazekas.hu/portal/feladatbank/adatbazis/Kurschak_Jozsef_verseny.html`.

[5] A Kömal digitális archívuma. A Középiskolai Matematikai és Fizikai Lapok archívuma a Sulineten. URL `http://www.sulinet.hu/komal/`.

[6] Középiskolai matematikai és fizikai lapok. A Bolyai János Matematikai Társulat és az Eötvös Loránd Fizikai Társulat folyóirata. URL `http://www.komal.hu`.

[7] B. L. van der Waerden: *Egy tudomány ébredése.* Budapest, 1977, Gondolat. ISBN 963 280 326 4.

[8] David Hilbert és Stefan Cohn Vossen: *Szemléletes geometria.* 1982, Gondolat. ISBN 963 281 143 7.