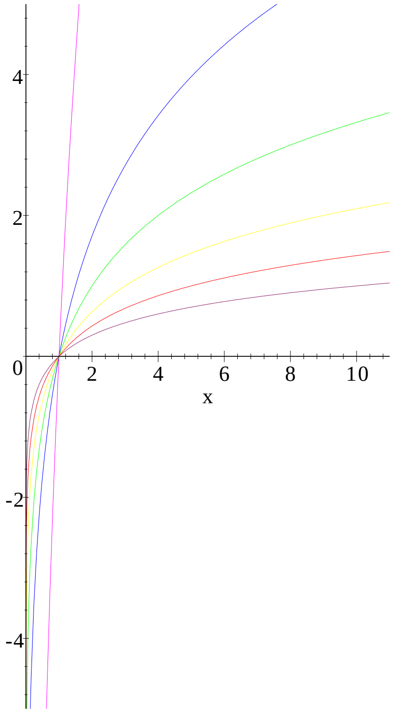
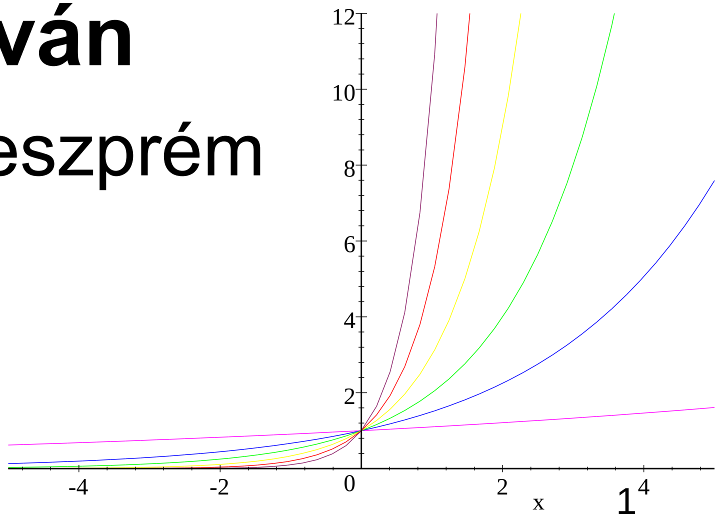
Matematikai Analízis elemei



dr. Szalkai István

Pannon Egyetem, Veszprém

2018. dec. 17.



- **vizsgák: írásbeli, példák+elmélet**

(lásd honlapomon feladatsorok)

1. október-november megbeszélve

2. december harmadik hete

!!!! Neptun + igazolvány

honlap:

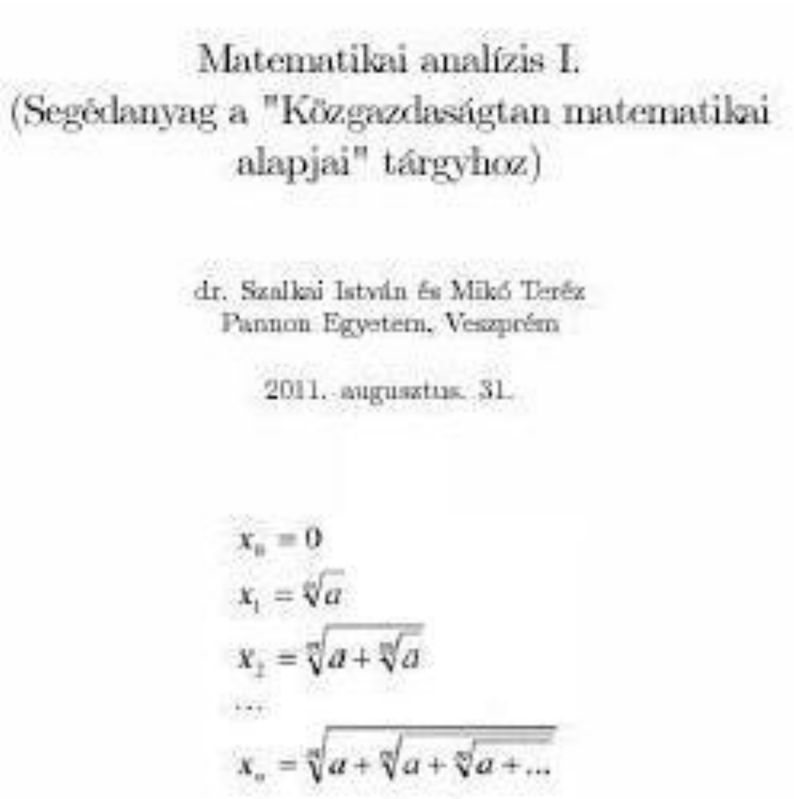
> http://math.uni-pannon.hu/~szalkai/

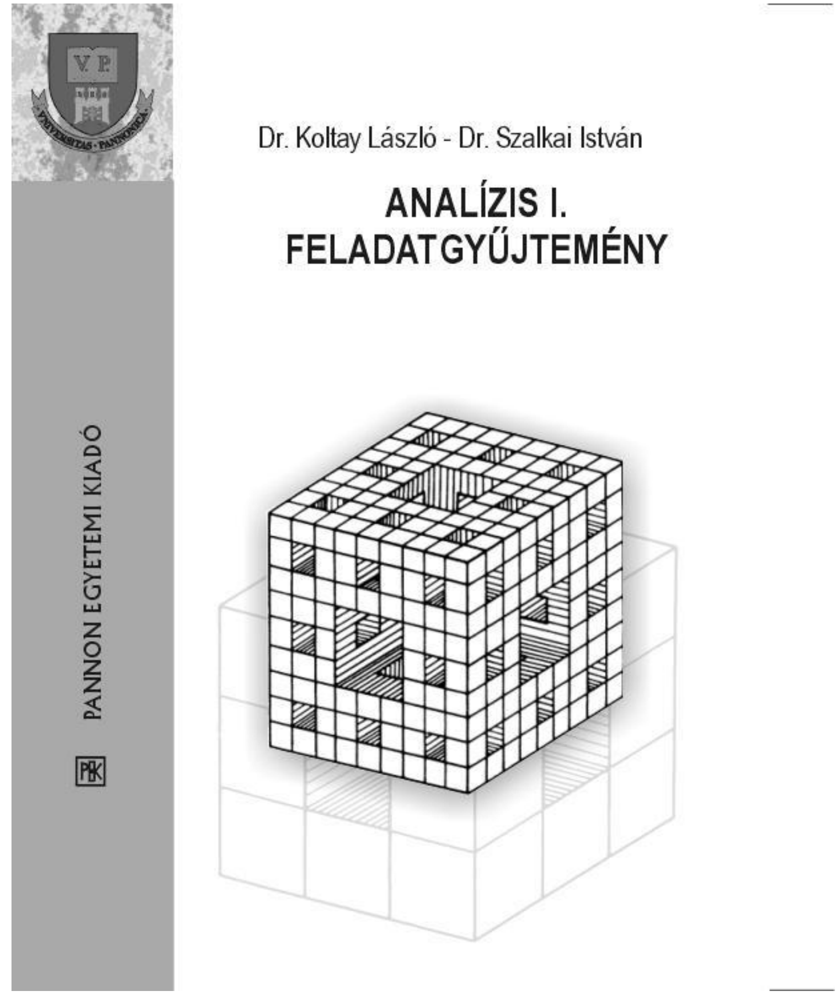
… Analízis I. ... *Levelező* **…**

email:

> szalkai@almos.uni-pannon.hu

tankönyvek:





részleteket lásd a <u>honlapomon</u>

Tartalom:

1. **Függvénytani alapfogalmak:** ÉT, ÉK, grafikonok rajzolása, elemi (nevezetes) függvények. Inverz- és összetett függvények.

2. **Sorozatok határértéke:** Elemi átalakítások, nevezetes sorozatok. $(1+{}^{s}/_{n})^{n}$ és "végtelen/ végtelen" alakú feladatok. Alkalmazások.

3. **Sorok határértéke**, mértani sorok.

4. **Függvények határértéke:** egyszerűbb feladatok, gyökkeresés.

5. **Differenciálszámítás** alapjai, érintő egyenlete.

6. **Függvényvizsgálat**, szöveges szélsőérték feladatok.

7. Differenciálszámítás alkalmazásai: érintő egyenlete, Taylor polinomok, L'Hospital szabály

8. **Primitív függvények:** elemi integrálok, parciális- és helyettesítéses integrálás.

9. **Határozott integrál:** Newton-Leibniz szabály, területszámítás. Improprius integrálás. Közelítő integrálás.

10. **Többváltozós függvények:** differenciálszámítás,szélsőértékszámítás.

kezdjük …

1. Függvények

1. <u>Függvénytani alapfogalmak</u> :

$y = f(x) = \ldots$ vagy $f : x \mapsto y$

Jelölések:

Dom(f) := D_f = ÉT (=Dominium ≈ "*kikötés*")
az *f* függvény **értelmezési tartománya ,**

Im(f) := Range(f) = Ran(f) = R_f = ÉK (=Image=Range)
az *f* függvény **értékkészlete.** □

HF: ism.

Elemi (alap-) függvények: $mx+b$, x^2, x^3, $x^{1/2}$, $1/x$, ${}^{a}/_{(x-b)}$, $\sin(x)$, $\cos(x)$, $\tan(x)=\mathrm{tg}(x)$, $\mathrm{cotan}(x)=\mathrm{ctg}(x)$, $\exp(x)=e^x$, $\exp_a(x)=a^x$, $\log(x)=\lg(x)$, $\ln(x)=\log_e(x)$ /e~2.71828/,

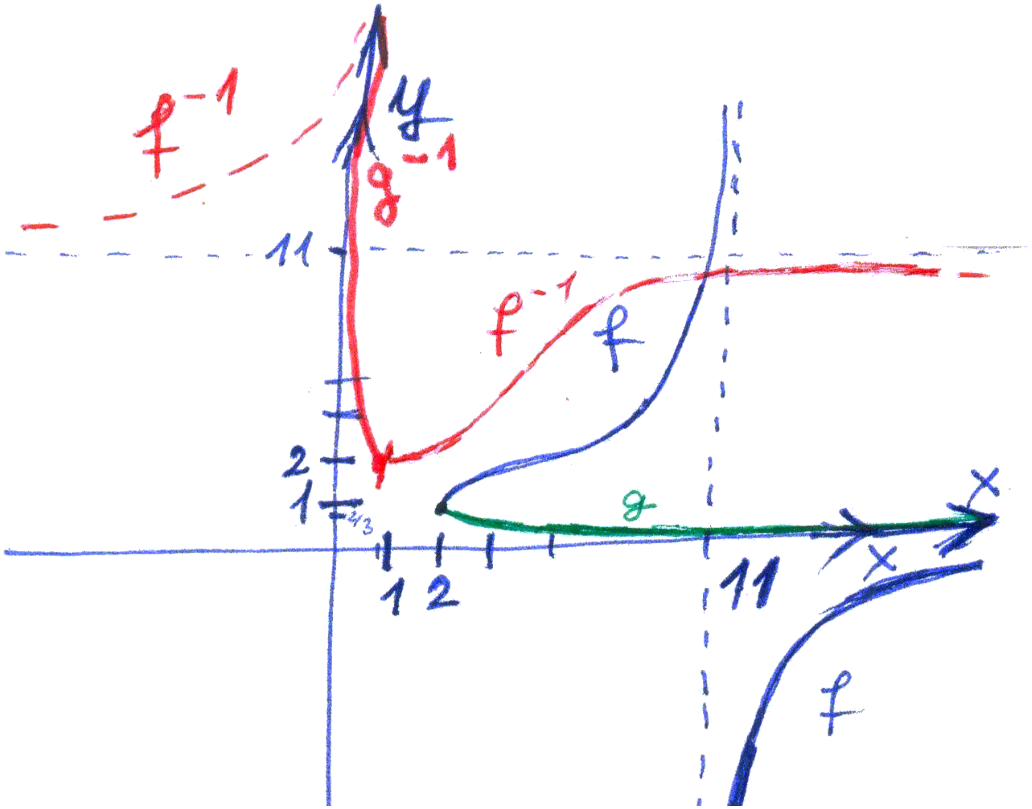
HF: ism., ábrák, zsebszámológép

Pl.

$$y = f(x) = \frac{2}{3-\sqrt{x-2}}$$

x	-20	...	...	+20
y	...	...	...	...

$$y = g(x) = \frac{2}{3+\sqrt{x-2}}$$



1.b) <u>Függvények inverze</u>

$f : \quad x \mapsto y$ és Dom(f)

$x \leftarrow\!\!| \quad y : f^{-1}$ és Dom(f^{-1}) ,

vagyis: $f^{-1}(y)=x \Leftrightarrow y=f(x)$ □

Észrevétel: f *nem* invertálható, ha

van $x_1 \neq x_2$ amelyekre $f(x_1) = f(x_2)$. □

Definíció: f **injektív** (**egy-egy értelmű**), ha *nincs* fenti x_1 és x_2 , *azaz*: $x_1 \neq x_2$ <u>esetén</u> ($\Rightarrow$) $f(x_1) \neq f(x_2)$. □

Ellenőrzése a gyakorlatban:

$$f(x_1) = f(x_2) \quad \Rightarrow \quad \ldots \quad \Rightarrow \quad x_1 = x_2 \ .$$ □

f^{-1} meghatározása:

$$y = f(x) \quad \Rightarrow \quad \ldots \quad \Rightarrow \quad x = f^{-1}(y) \ .$$ □

Pl. $f(x_1) = f(x_2)$

$$\frac{2}{3-\sqrt{x_1-2}} = \frac{2}{3-\sqrt{x_2-2}}$$

$$\frac{3-\sqrt{x_1-2}}{2} = \frac{3-\sqrt{x_2-2}}{2}$$

$$3-\sqrt{x_1-2} = 3-\sqrt{x_2-2}$$

$$-\sqrt{x_1-2} = -\sqrt{x_2-2}$$

$$x_1-2 = x_2-2$$

$$x_1 = x_2$$

OK tehát invertálható.

$$y = f(x)$$

$$y = \frac{2}{3-\sqrt{x-2}}$$

$$\frac{1}{y} = \frac{3-\sqrt{x-2}}{2}$$

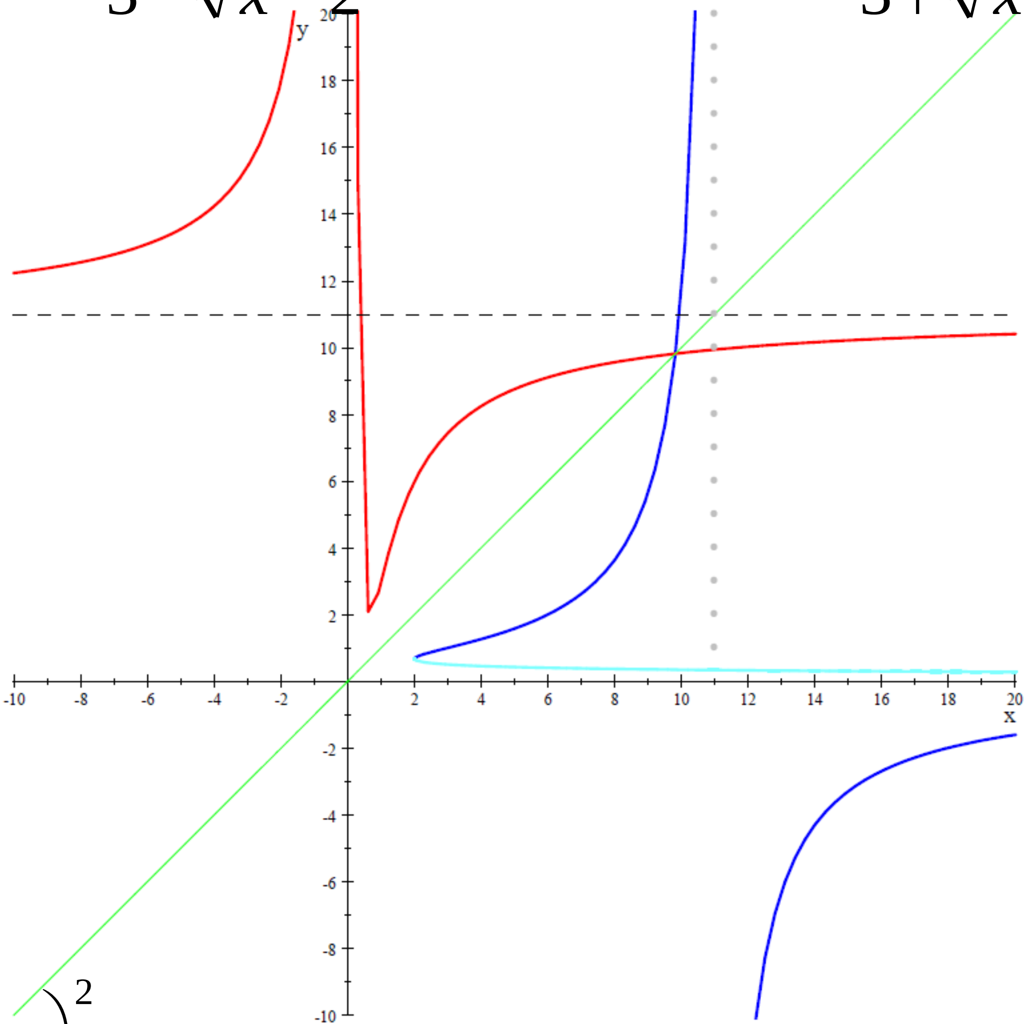
$$\frac{2}{y} = 3-\sqrt{x-2}$$

$$\frac{2}{y}-3 = -\sqrt{x-2}$$

$$\left(\frac{2}{y}-3\right)^2 = x-2$$

$$f^{-1}(y) = \left(\frac{2}{y}-3\right)^2 + 2 = x$$

$$y = f(x) = \frac{2}{3-\sqrt{x-2}} \quad \neq \quad y = g(x) = \frac{2}{3+\sqrt{x-2}}$$



$$f^{-1}(y) = \left(\frac{2}{y} - 3\right)^2 + 2 = g^{-1}(y) \qquad \mathrm{DE:} \quad Dom(f^{-1}) \neq Dom(g^{-1})$$

$$y = f(x)$$

például:

$$y = \frac{2}{3-\sqrt{x-2}}$$

négyzetre emeléskor az előjel eltűnik ...

$$\frac{1}{y} = \frac{3-\sqrt{x-2}}{2}$$

$$\frac{2}{y} = 3-\sqrt{x-2}$$

$$\frac{2}{y} - 3 = -\sqrt{x-2}$$

=>

$$\frac{2}{y} - 3 \le 0$$

$$\frac{2}{y} \le 3$$

...

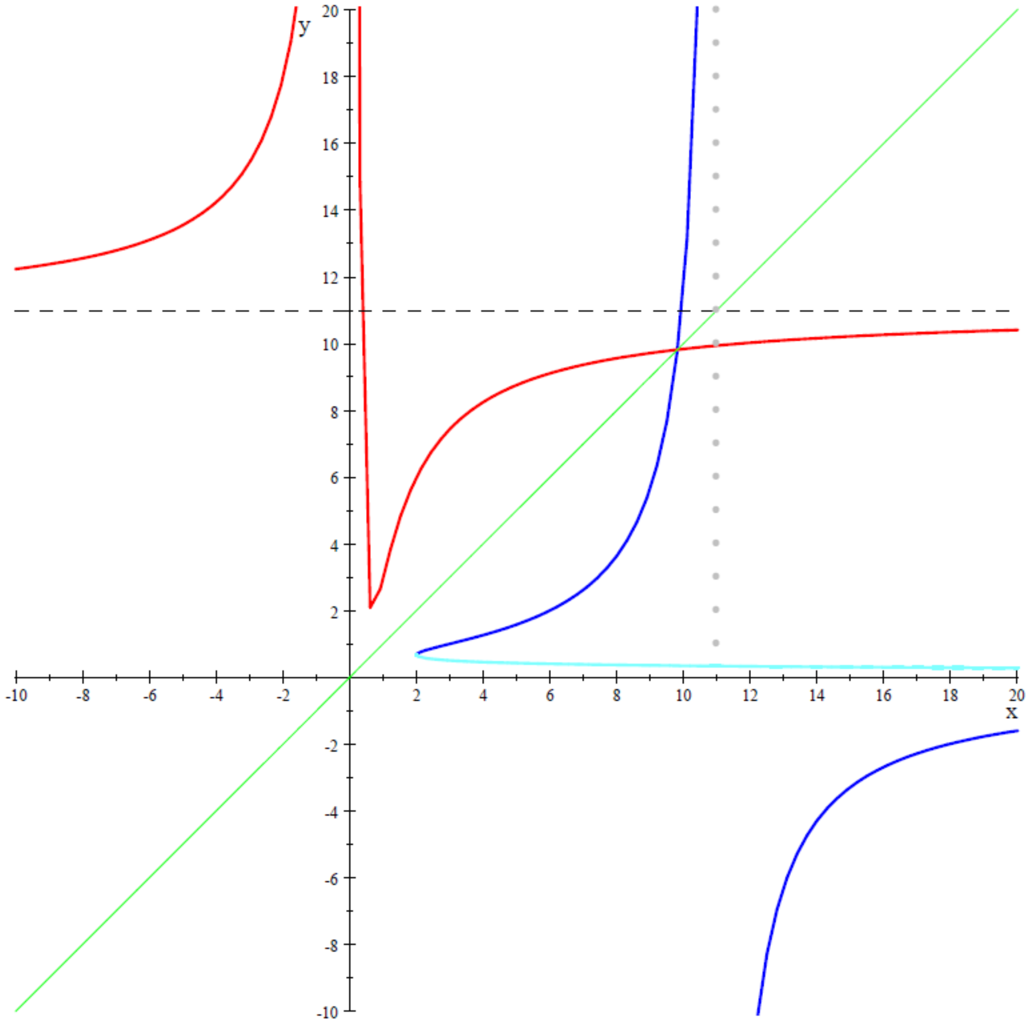
$$\left\{ y \le 0 \quad \text{VAGY} \quad 2/3 \le y \right\}$$

$$= Dom(f^{-1})$$

$$\left(\frac{2}{y} - 3\right)^2 = x - 2$$

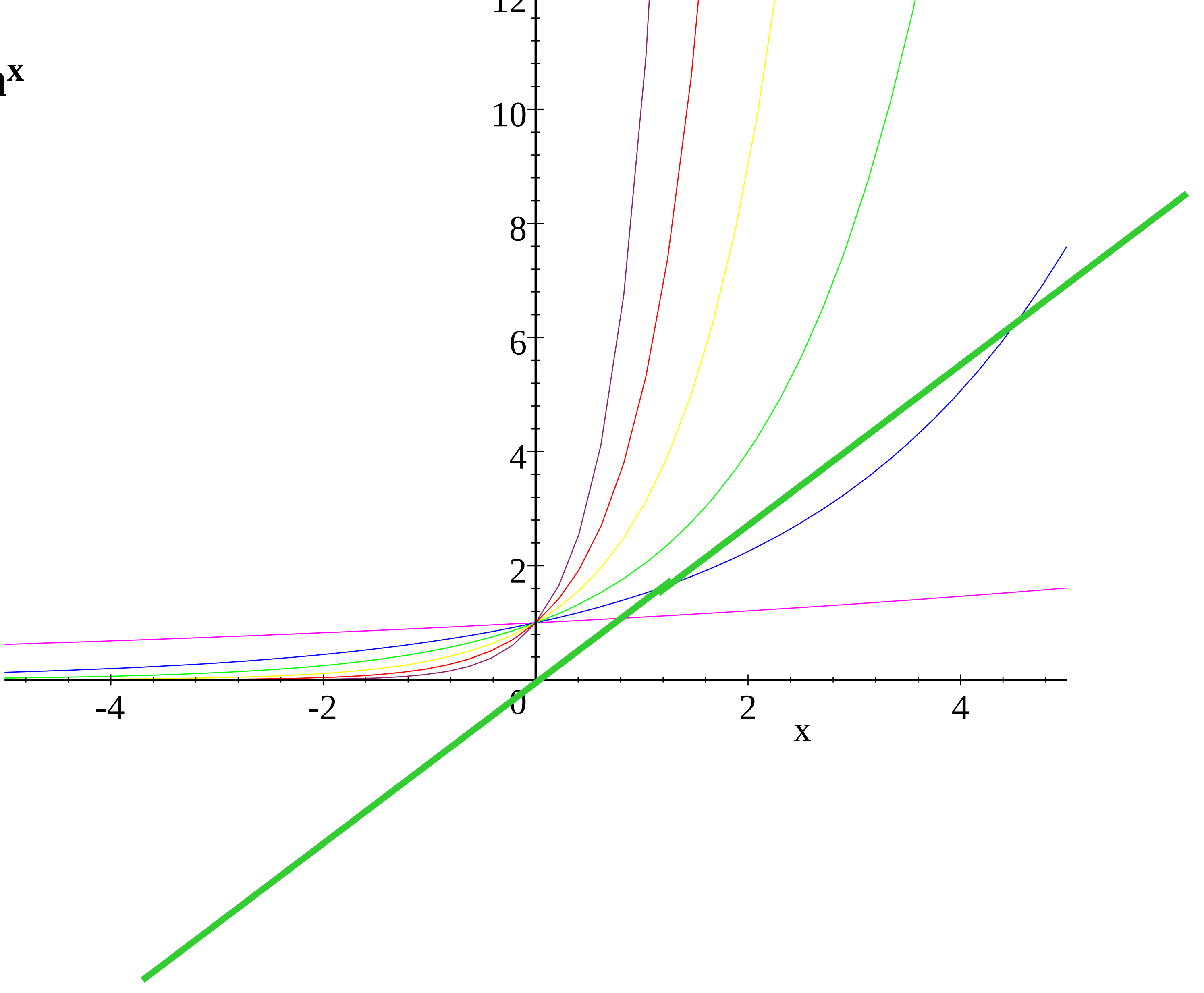
$$f^{-1}(y) = \left(\frac{2}{y} - 3\right)^2 + 2 = x$$

grafikusan: tükrözés az **y=x** egyenesre:

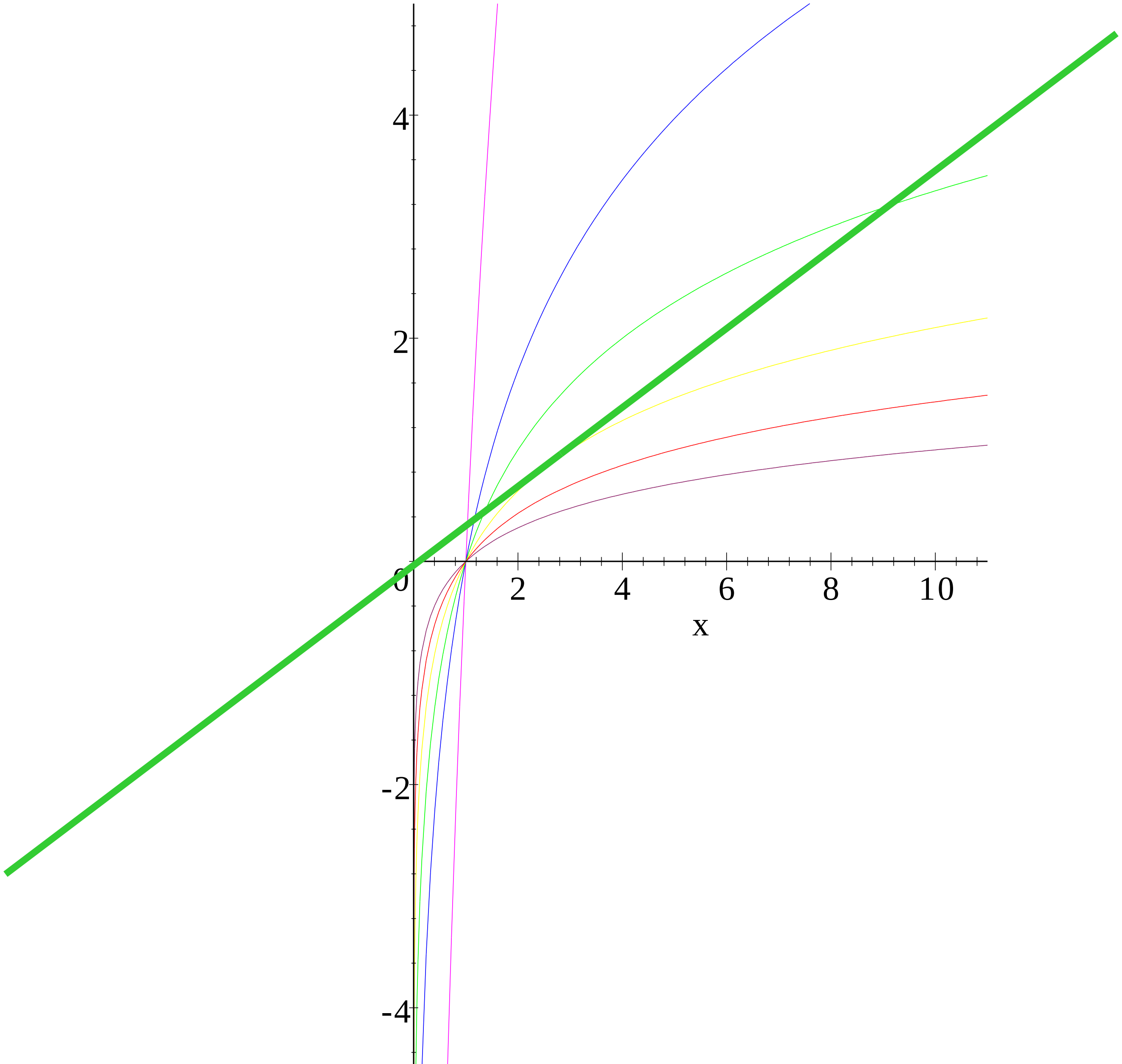


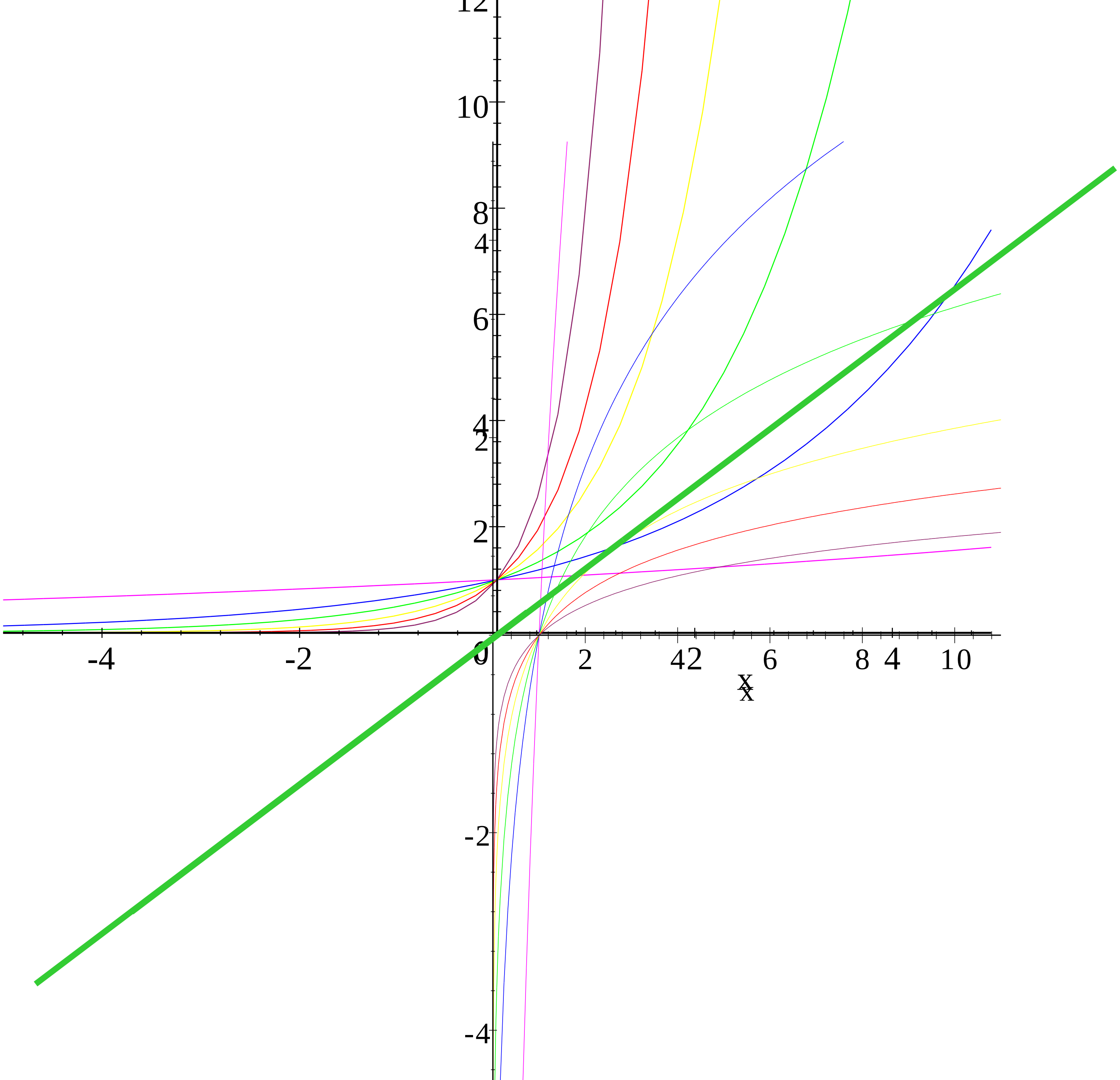
f(x)* , *f^{-1}(x)=g^{-1}(x)* , *y=x* , *g(x)

$y=a^x$



$\log_a(x)$





12
10
8
4
6
4
2
2
0
-4
-2
2
42
6
8
4
10
x
x
-2
-4

1.c) <u>Összetett függvények</u> (fv.-ek kompozíciója)

Definíció: Legyenek $g: A \to B$ és $f: Y \to Z$ tetszőleges függvények, $\mathrm{Im}(g) \cap \mathrm{Dom}(f) \neq \emptyset$.
Ekkor $h := f \circ g$ az f és g függvények **kompozíciója** a következő:

$$\mathbf{h(x) := (f \circ g)(x) := f(g(x))}$$

és

$$\mathbf{Dom(h) = \{ x \in Dom(g) : g(x) \in Dom(f) \}} \ . \quad \square$$

Pl.
$$(\sin \circ \sqrt{\ \ })(x) = \sin\left(\sqrt{x}\right) \quad \neq \quad (\sqrt{\ \ } \circ \sin)(x) = \sqrt{\sin(x)}$$

és

$$Dom\left(\sin\sqrt{x}\right) \quad \neq \quad Dom\left(\sqrt{\sin(x)}\right)$$

!!!!! g(x)="**belső függvény**", f(x)="**külső függvény**" !!!!!

2. Sorozatok

2. <u>Sorozatok</u>

$n \to \infty$

Definíció: **számsorozat** = **numerikus sorozat** :
Tetszőleges $a : N \to R$ *függvényt* sorozatnak nevezünk.
Az $a(n)$ értéket általában $\boldsymbol{a_n}$ -el jelöljük. □

Pl.: $a_n = \dfrac{n^2 + 2n - 5}{n^2 - 3n + 8}$

$a_{10} = {}^{115}/_{78} \sim 1{,}474358$

$a_{20} = {}^{435}/_{348} = 1{,}25-$

$a_{100} = {}^{10195}/_{9708} \sim 1{,}050165$

$a_{1000} = {}^{1001995}/_{997008} \sim 1{,}005002$

$a_{10000} = {}^{100019995}/_{99970008} \sim 1{,}000500$

…

sejtés:

ebben a példában

$$\boxed{\begin{array}{l} n \to \infty \\ \text{esetén} \\ a_n \to 1 \end{array}}$$

Definíció: Az $\{ a_n \}$ sorozat **konvergens**, ha *létezik* olyan $A \in R$ szám, amelyre:
tetszőleges $\varepsilon > 0$ *pozitív számhoz* (="**hibahatár**") *létezik olyan* $n_0 \in N$ *természetes szám* (="**küszöbszám**"), *amelyre tetszőleges* $n>n_0$ *számra*:

$$\boxed{| a_n - A | < \varepsilon}$$ (=a_n eltérése A -tól).

A fenti A számot hívjuk a sorozat (***véges***) **határértékének** (=limesz), és így **jelöljük:**

$$\lim_{n \to \infty} a_n = A \qquad \text{vagy} \qquad a_n \to A \quad . \qquad \square$$

Definíció: Az $\{ a_n \}$ sorozatot ***konvergensnek*** nevezzük, ha létezik fenti (véges) határértéke.
Az $\{ a_n \}$ sorozatot ***divergensnek*** nevezzük, ha *nem* konvergens. □

<u>Számolás:</u>

"$\frac{\infty}{\infty}$" esetén a nevező legnagyobb tagjával egyszerűsítünk:

pl.:

$$\frac{n^2+2n-5}{n^2-3n+8} = \frac{n^2\left(1+\frac{2}{n}-\frac{5}{n^2}\right)}{n^2\left(1-\frac{3}{n}+\frac{8}{n^2}\right)} = \frac{1+\frac{2}{n}-\frac{5}{n^2}}{1-\frac{3}{n}+\frac{8}{n^2}} \to 1$$

Nevezetes határértékek, tételek, módszerek:

Ld. "**Konvergencia kritériumok**" 1.old. a honlapon !

Feladatok:

Ld. **Feladatgyűjtemény** 2.fejezet, 2.1, 2.4, 2.8 feladatok a honlapon !

<u>Definíció:</u> Az $\{a_n\}$ sorozat **határértéke** $+\infty$ ha *tetszőleges* $p \in R$ szám esetén *van olyan* $n_p \in N$ szám (= "**küszöbszám**") amelyre minden $n>n_p$ esetén

$$a_n > p\,.$$

A fentieket így jelöljük: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$ vagy $a_n \to +\infty$. □

<u>Definíció:</u> Az $\{a_n\}$ sorozat **határértéke** $-\infty$ ha *tetszőleges* $p \in R$ szám esetén *van olyan* $n_p \in N$ szám (="**küszöbszám**"), amelyre minden $n>n_p$ esetén

$$a_n < p\,.$$

A fentieket így jelöljük: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$ vagy $a_n \to -\infty$. □

((mindössze két helyen van változás!!))

Fontos példa:

$\boxed{1^{\infty} \text{ típus:}}$

$$\left(\frac{n+3}{n-2}\right)^n = \left(\frac{\frac{n+3}{n}}{\frac{n-2}{n}}\right)^n = \frac{\left(\frac{n+3}{n}\right)^n}{\left(\frac{n-2}{n}\right)^n} = \frac{\left(1+\frac{3}{n}\right)^n}{\left(1+\frac{-2}{n}\right)^n} \to \frac{e^3}{e^{-2}} = e^5.$$

Felhasznált **Tétel**: (ld."kritériumok")

$$\left(1+\frac{t}{n}\right)^n \to e^t \quad \text{minden } t \in R \text{ valós számra.}$$

Sorozatok alkalmazása (gyors konvergencia!):

1) Newton gyökvonás:

$$x_0 \in \mathbb{R}^+, \quad x_{n+1} := \frac{x_n + \frac{\gamma}{x_n}}{2} \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} x_n = \sqrt{\gamma}$$

2) Bolyai Farkas trinom egyenletek:

$$x^m = a + x \qquad (m > 2,\ m \in \mathbb{N},\ a \in \mathbb{R}^+)$$

$$\Downarrow$$

$$x_0 := 0 \quad és \quad x_{n+1} := \sqrt[m]{x_n + a} \quad (n \in \mathbb{N}),$$

$$\Downarrow$$

$$x' := \lim_{n\to\infty} x_n$$

(Részletesen lásd a tankönyvben.)

http://math.uni-pannon.hu/~szalkai/Analizis1TK-animaciok.zip , X12-Bolyai-gyok.xls

Bolyai Farkas gyökközelítő algoritmusa

Szalkai István, Veszprém, 2013.07.23.

$$x^m = a + x \qquad (m > 2,\ m \in \mathbb{N},\ a \in \mathbb{R}^+)$$

$$x_0 := 0 \quad \text{és} \quad x_{n+1} := \sqrt[m]{x_n + a}$$

m =	3	**x_0 =**		**0**
		x_1 =	$(x_0+a)^{1/m}$ =	1,7099759467
a =	5	**x_2 =**	$(x_1+a)^{1/m}$ =	1,8861388233
		x_3 =	$(x_2+a)^{1/m}$ =	1,9025025954
		x_4 =	$(x_3+a)^{1/m}$ =	1,9040083978
		x_5 =	$(x_4+a)^{1/m}$ =	1,9041468428
		x_6 =	$(x_5+a)^{1/m}$ =	1,9041595706
		x_7 =	$(x_6+a)^{1/m}$ =	1,9041607407
		x_8 =	$(x_7+a)^{1/m}$ =	1,9041608482
		x_9 =	$(x_8+a)^{1/m}$ =	1,9041608581
		x_{10}=	$(x_9+a)^{1/m}$ =	1,9041608590

A piros mezőkbe *tetszőleges* pozitív számokat írva megkapjuk a sorozat első tíz tagját, x_{10} már nyolc tizedejegyre pontosan közelíti az $\mathbf{x^m = a + x}$ egyenlet gyökét!

2. Sorok

3. Sorok

!!! Sor ≠ sorozat !!!

Probléma:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = a_0+a_1+a_2+\ldots+a_n+\ldots = ? \quad \text{(végtelen sok tag)}$$

(matematikus) Megoldás:

Definíció: (*részletösszegekkel*)

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n := \lim_{N\to\infty}\left(\sum_{n=0}^{N} a_n\right) := \lim_{N\to\infty}(a_0+a_1+a_2+\ldots+a_N) = \lim_{N\to\infty}(s_N)$$

ha ez a határérték létezik . □

Kiszámítása:

mértani sor: *Ha* $|q|<1$*, akkor*

$$\sum_{n=0}^{\infty} c \cdot q^n = c + cq + cq^2 + \ldots + cq^n + \ldots = c \cdot \frac{1}{1-q}$$

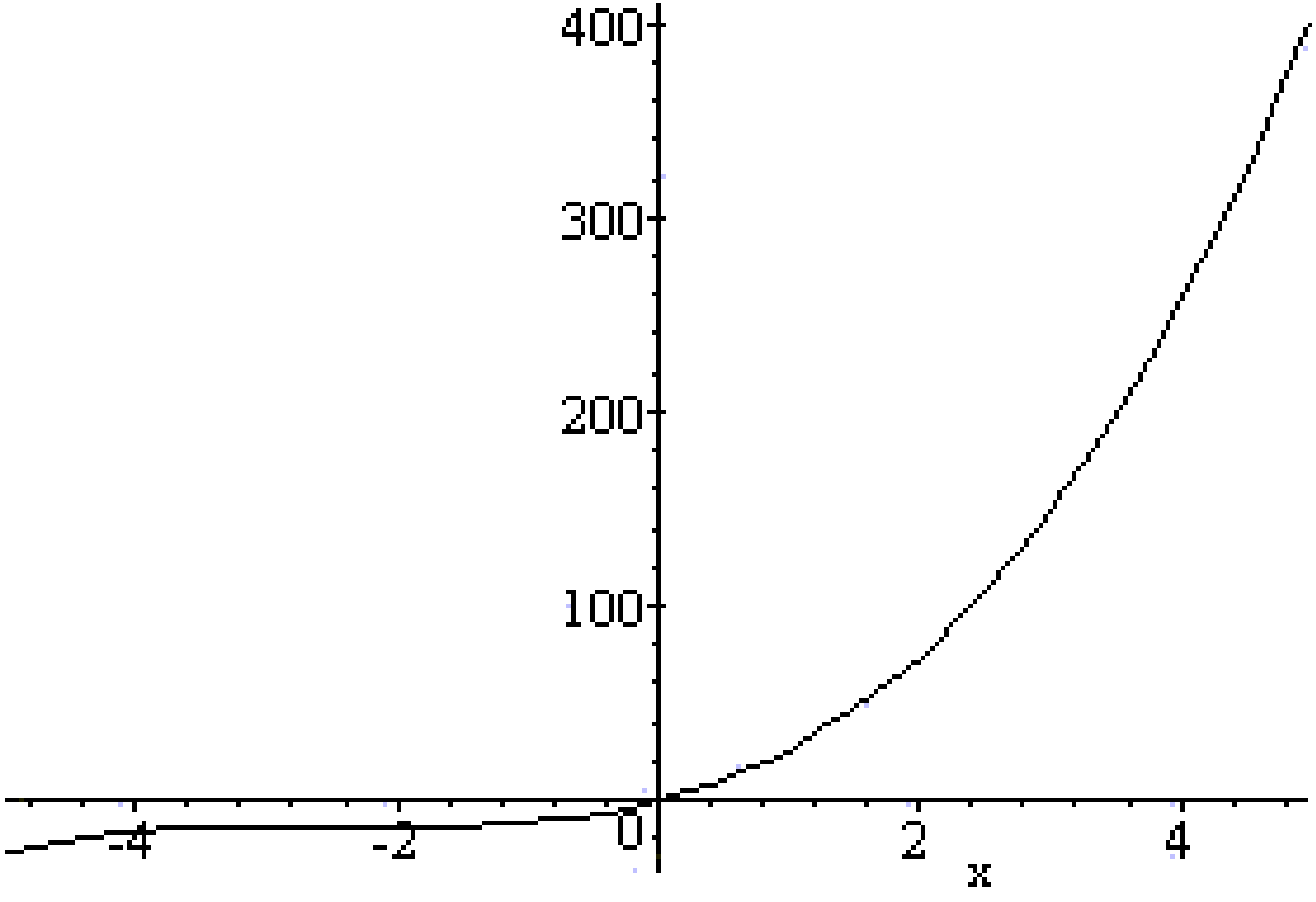
ha $1<q$ *akkor* $\Sigma = +\propto$,

ha $q< -1$ *akkor* Σ divergens .

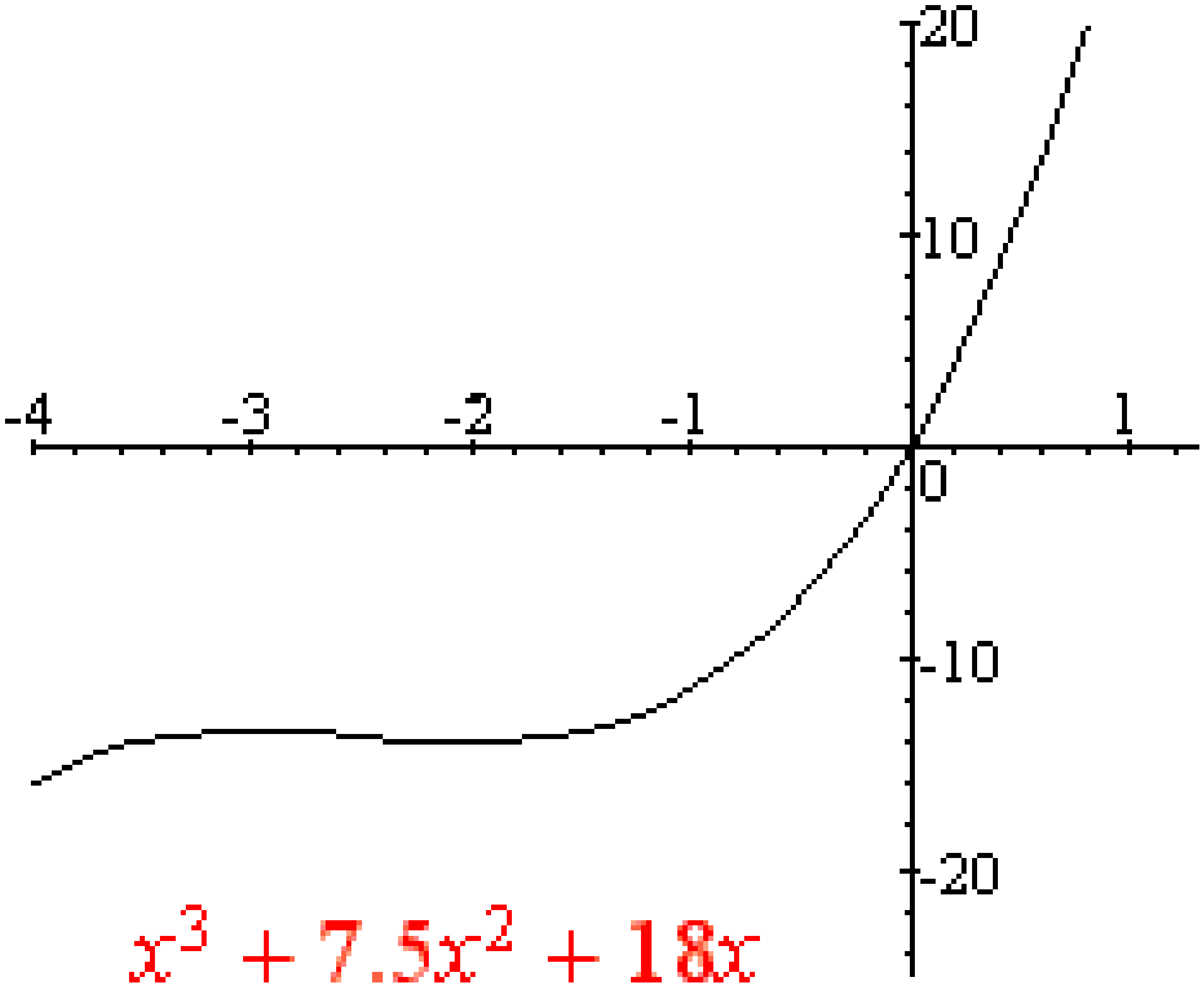
. . .

6. (teljes) Függvényvizsgálat

pl. $f(x) = x^3 + 7.5x^2 + 18x - 20$



$x^3 + 7.5x^2 + 18x$



$$x^3 + 7.5x^2 + 18x$$

$f(x) = x^3 + 7.5x^2 + 18x - 20$

I. $Dom(f) = R$ **,** folytonos => függőleges aszimptota nincs**,**

nem páros**,** nem páratlan**,** nem periodikus**,** gyökök = nehéz**,**

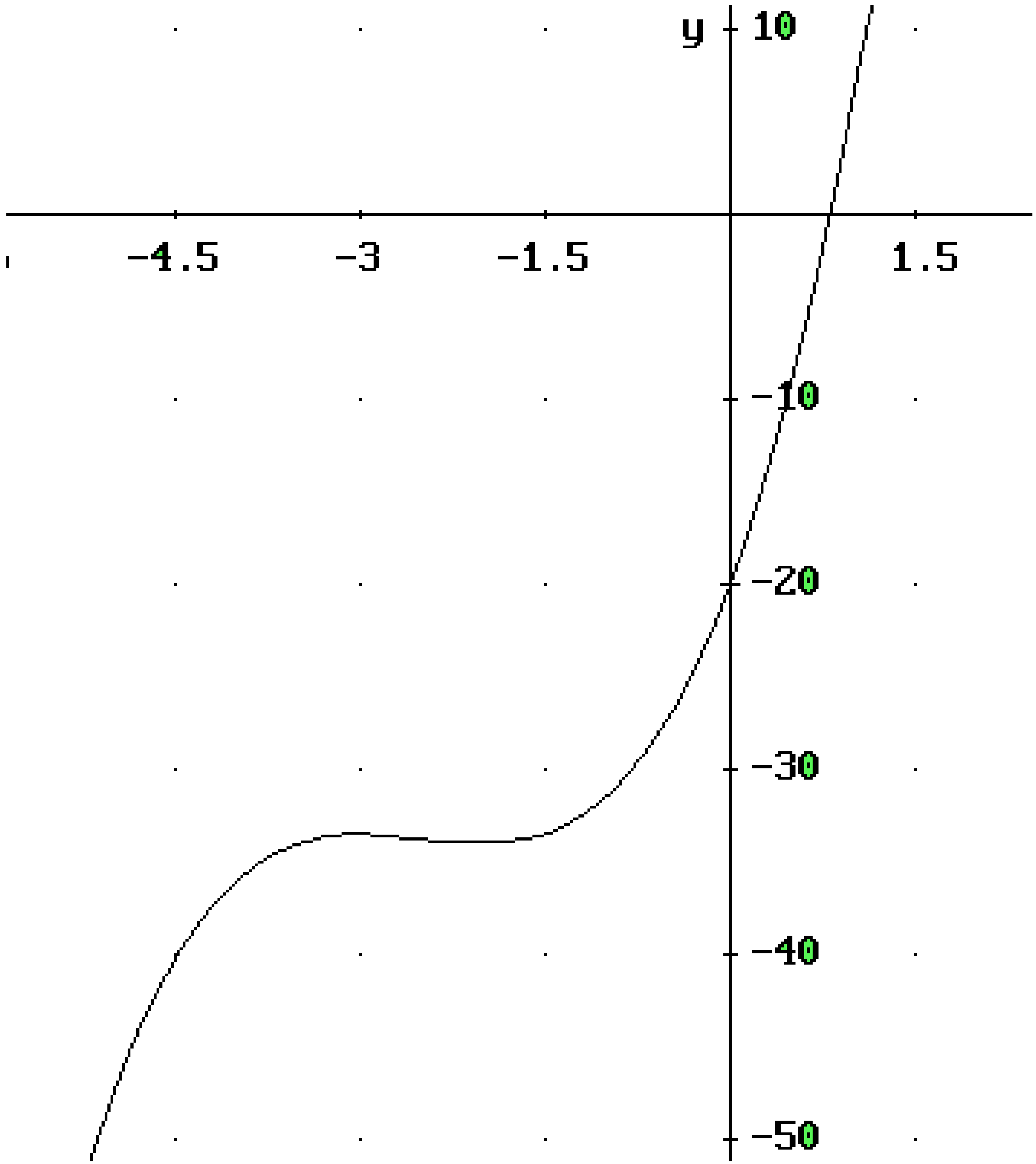
$\lim_{n \to -\infty} f(x) = -\infty$ **,** $\lim_{n \to \infty} f(x) = +\infty$ => vízszintes aszimptota nincs**,**

II. $f\,'(x) = 3x^2 + 15x + 18$, gyökei: $x_1 = -2$, $x_2 = -3$

x =		-3		-2	
$f\,'(x)=$	**+**	0	**-**	0	**+**
$f(x) =$	/	max.	\	min.	/

III. $f\,''(x) = 6x + 15$, gyöke: $x_3 = -2.5$

x =		-2.5	
$f\,''(x)=$	**-**	0	**+**
$f(x) =$	∩	infl.	∪


y
10
-4.5
-3
-1.5
1.5
-10
-20
-30
-40
-50

Vége.