A közgazdaságtan matematikai alapjai
I. zárthelyi dolgozat
2008. október 28. - „B” csoport

Beugró feladatok Adja meg az alábbi függvények deriváltját!

a
$$f'(x) = (26x^{20} + 2x^5 - 10x^2)' = (26 * 20)x^{19} + 10x^4 - 20x$$

b
$$f'(x) = \left(\frac{\ln\,(x)}{\cos(x)}\right)' = \frac{\frac{1}{x}\cos(x) + \ln\,(x)\sin(x)}{(\cos(x))^2}$$

c
$$f'(x) = \left((e^x + 2)^{2008}\right)' = 2008(e^x + 2)^{2007} * e^x$$

1. **Feladat.** Adja meg $f \circ g$-t, ha

$$f: \quad]-6;8] \to \mathbb{R}, \quad f(x) = 2x + 5$$

és

$$g: \quad]-2;1] \to \mathbb{R}, \quad g(x) = 7x - 6$$

Megoldás

$$-6 < g(x) \leq 8$$
$$-6 < 7x - 6 \leq 8$$
$$0 < 7x \leq 14$$
$$0 < x \leq 2$$

$D_{f\circ g} =]-2;1] \quad \cap \quad]0;2] \quad = \quad]0;1]$
A függvény: $f \circ g = 2(7x - 6) + 5$.

2. **Feladat.** Melyik konvergens az alábbi sorozatok közül, ha konvergens, akkor számolja a határértékét?

a.) $a_n = \dfrac{17n^5 + 5n^2 - n + 8}{3n^5 - n + 1} = \dfrac{n^5(17 + \frac{5}{n^3} - \frac{1}{n^4} + \frac{8}{n^5})}{n^5(3 - \frac{1}{n^4} + \frac{1}{n^5})} \to \dfrac{17}{3}$

b.) $b_n = \sqrt{n^2 - 3} - n = \dfrac{n^2 - 3 - n^2}{\sqrt{n^2 - 3} + n} = \dfrac{-3}{\sqrt{n^2 - 3} + n} \to 0$

c.) $c_n = \left(\dfrac{n + 5}{n + 3}\right)^n = \left(\dfrac{n(1 + \frac{5}{n})}{n(1 + \frac{3}{n})}\right)^n = \dfrac{\left(1 + \frac{5}{n}\right)^n}{\left(1 + \frac{3}{n}\right)^n} \to \dfrac{e^5}{e^3} = e^2$

3. **Feladat.** Határozza meg az alábbi sorozat határértékét! Keressen ϵ -hoz küszöbszámot!

$$a_n = \frac{4n + 3}{5n - 2}$$

Megoldás

$$a_n = \frac{4n + 3}{5n - 2} = \frac{n(4 + \frac{3}{n})}{n(5 - \frac{2}{n})} \to \frac{4}{5}$$
$$\left|\frac{4n + 3}{5n - 2} - \frac{4}{5}\right| < \epsilon$$
$$\left|\frac{20n + 15}{25n - 10} - \frac{20n - 8}{25n - 10}\right| < \epsilon$$

$$\left|\frac{23}{25n-10}\right| < \epsilon$$
$$\frac{23}{25n-10} < \epsilon$$
$$23 < \epsilon * 25n - 10 * \epsilon$$
$$23 + 10 * \epsilon < \epsilon * 25n$$
$$\frac{23 + 10 * \epsilon}{25 * \epsilon} < n$$

4. **Feladat.** Invertálható-e az $f(x)$ függvény? Ha igen, akkor adja meg a függvény inverzét!

$$f: \quad]1;\infty[\rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = 1 - 2x + x^2$$

Megoldás
Invertálhatóság:

$$1 - 2x_1 + x_1^2 \neq 1 - 2x_2 + x_2^2$$
$$(x_1 - 1)^2 \neq (x_2 - 1)^2$$
$$|x_1 - 1| \neq |x_2 - 1|$$
$$x_1 - 1 \neq x_2 - 1$$
$$x_1 \neq x_2$$

Inverz függvény:

$$y = 1 - 2x + x^2$$
$$y = (x-1)^2$$
$$\sqrt{y} = |x - 1|$$
$$\sqrt{y} = x - 1$$
$$\sqrt{y} + 1 = x$$

Értelmezési tartomány
A függvény szigorúan monoton növekedő az értelmezési tartomány minden pontjában. Ezért
$$f(1) = 1 - 2 * 1 + 1^2 = 0$$
Emellett a függvény végtelenbe tart, ha x tart a végtelenbe.

$$f^{-1}(x): \quad]0;\infty[\rightarrow \mathbb{R}, \quad f^{-1}(x) = \sqrt{x} + 1$$

5. **Feladat.** Adja meg az alábbi függvényhatárértékeket, ha léteznek!

a.) $\lim_{x\rightarrow -3} \dfrac{x^2+5x+6}{x^2-9} = \lim_{x\rightarrow -3} \dfrac{(x+2)(x+3)}{(x-3)(x+3)} = \lim_{x\rightarrow -3} \dfrac{x+2}{x-3} = \dfrac{-1}{-6} = \dfrac{1}{6}$

b.) $\lim_{x\rightarrow 2} \dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{2}}{x^2-4} = \lim_{x\rightarrow 2} \dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{2}}{(x-2)(x+2)} = \lim_{x\rightarrow 2} \dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{2}}{(\sqrt{x}-\sqrt{2})(\sqrt{x}+\sqrt{2})(x+2)} =$
$\lim_{x\rightarrow 2} \dfrac{1}{(\sqrt{x}+\sqrt{2})(x+2)} = \dfrac{1}{8\sqrt{2}}$

6. **Feladat.** Írja fel az alábbi függvény $(2;2)$ pontjához húzott érintőjének egyenletét!

$$f(x) = \frac{x}{x-1}$$

Megoldás

$$f'(x) = \frac{1*(x-1) - x*1}{(x-1)^2} = \frac{-1}{(x-1)^2}$$

$$f'(2) = \frac{-1}{(2-1)^2} = -1$$

Az érintő egyenlete:

$$y = -1(x-2) + 2$$

Jó munkát!