

A közgazdaságtan matematikai alapjai

7. gyakorló feladatsor

Gazdálkodási és közgazdász szakos I. évf. hallgatók számára

Érintő egyenes egyenlete függvényvizsgálat, L'Hospital-szabály

1. **Feladat.** Határozzuk meg az

- (a) $f(x) = x^2 - 3x + 1$ függvény grafikonjának $x = 2$ abszcisszájú pontjához húzott érintő egyenletét!
- (b) $f(x) = (x + 1) \cdot \sqrt[3]{3 - x}$ függvény görbéjének $(-1; 0)$ pontjába húzott érintő egyenletét!
- (c) $f(x) = x - \frac{1}{x}$ függvény görbéjének az x tengellyel alkotott metszéspontjaiba húzott érintőinek egyenleteit!

2. **Feladat.** Tekintsük az $y = \sqrt{x}$ egyenletű görbét!

- (a) Írjuk fel a görbét $(4; 2)$ pontjában érintő egyenes egyenletét!
- (b) Írjuk fel a görbe $(-1; 0)$ ponton átmenő érintőjének egyenletét!
- (c) Írjuk fel a görbe $m = 2$ meredekségű érintőjének egyenletét!

3. **Feladat.** Adjuk meg az $x^2 - y^2 = 1$ egyenletű hiperbola $(2; \sqrt{3})$ pontjához tartozó érintő egyenletét!

4. **Feladat.** Vizsgáljuk meg a következő függvényeket, van-e szélsőértékük, s ha van, milyen. Határozzuk meg azokat az intervallumokat is, amelyeken a függvény monoton:

- (1) $x^4 - x^2$
- (2) $\frac{x}{x^2 + 1}$
- (3) $x^3 - 12$
- (4) $\frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$
- (5) $x\sqrt{1 - x^2}$
- (6) e^{-x^2}

5. **Feladat.** A következő függvényeknél vizsgáljuk meg, hogy a függvény görbéje mely intervallumban konvex, ill. konkáv. Határozzuk meg a függvény inflexiós pontjainak koordinátáit is!

- (1) $x^3 - 3x^2 - 9x + 9$
- (2) $x^2 - 2x + 5$
- (3) $\frac{4x}{x^2 + 1}$
- (4) $\frac{x^2}{2} + \ln(x)$
- (5) $x \cdot e^{-x}$
- (6) $\frac{e^x - e^{-x}}{2}$

6. **Feladat.** Diszkutáljuk (ábrázoljuk) az alábbi függvényeket!

- (1) $(x - 1)^2(x + 2)$
- (2) $\frac{x^2 - 2x + 2}{x - 1}$
- (3) $1 + x^2 - \frac{x^4}{2}$
- (4) $\frac{2x}{5} - \frac{x^3}{2} + \frac{x^5}{10}$
- (5) $\frac{x^2 + 3x + 2}{x^2}$
- (6) $3\sqrt[3]{x} - x$
- (7) $(x - 1)\sqrt{x}$
- (8) $\frac{\cos(x)}{\cos(2x)}$
- (9) $x + e^{-x}$
- (10) $16x(x - 1)^3$
- (11) $\frac{\sqrt{x^2 - 4x}}{2 - x}$
- (12) $\frac{(2 - x)^3}{(x - 3)^2}$
- (13) $\arcsin(1 - \sqrt[3]{x^2})$
- (14) $\left(\frac{1 + x}{1 - x}\right)^4$
- (15) $2x - 1 - \frac{1}{x + 1}$
- (16) $\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x}\right)$
- (17) $\frac{x + 2}{\sqrt{x^2 + 2}}$
- (18) $\ln(1 + e^x)$
- (19) $\frac{3x^4 + 1}{x^3}$
- (20) $\frac{4x - 12}{(x - 2)^2}$
- (21) $\arcsin\left(\frac{2x}{1 + x^2}\right)$
- (22) $\operatorname{arctg}(\ln(x))$
- (23) $x \left(2 + \sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)$
- (24) $\sqrt{x^3 - 6x^2 + 3x}$
- (25) $\sqrt[3]{1 - x^2}$
- (26) $\ln(x) - \operatorname{arctg}(x)$
- (27) $\ln\left(\frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + 1}\right)$
- (28) $\frac{e^x}{1 + x}$
- (29) $\arcsin(x) + \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$
- (30) $\frac{x}{e^x(x - 1)}$

7. **Feladat.** Határozzuk meg az alábbi határértékeket a L'Hospital-szabály segítségével!

$$\begin{array}{lll} (1) \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 - 2x - 1}{5x^2 - x - 4} & (2) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{\sin(x)} & (3) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{\ln(x+1)} \\ (4) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}(x) - x}{x - \sin(x)} & (5) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x) - 1}{x^2} & (6) \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{tg}(x)}{\operatorname{tg}(5x)} \\ (7) \quad \lim_{x \rightarrow 0} x^2 \cdot e^{\frac{1}{x^2}} & (8) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - 1}{1 - \cos(x)} & (9) \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} x \cdot \ln(x) \end{array}$$

8. **Feladat.** Igazoljuk, hogy a

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}}$$

határérték kiszámítására a L'Hospital-szabály nem alkalmas!

Jó munkát!