A primitív függvény keresésének módszerei
avagy a „Nagy receptkönyv”

Fontos: Ez az anyag csak egy emlékeztető; nem helyettesíti az előadások, gyakorlatok látogatását, a tankönyveket, jegyzeteket és az egyéni gyakorlást!

Primitív függvény keresésekor az alábbi kérdéseket tehetjük fel:

0. *Nem tudjuk-e azonnal felírni a primitív függvényt?*

1. *Van-e lehetőség az integrandusz elemi átalakítására?*

Példák: $\int (\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}})^2\, dx$ $(x + 2x^{1/6} + x^{-2/3})$; $\int \frac{2x+3}{4x+5}\, dx$ $(\frac{1}{2} + \frac{1/2}{4x+5})$; $\int \operatorname{tg}^2 x\, dx$ $(\frac{1}{\cos^2 x} - 1)$; $\int \frac{1}{4-x^2}\, dx$ $(\frac{1/4}{2-x} + \frac{1/4}{2+x})$; $\int \frac{\sqrt{x}-x^3e^x+x^2}{x^3}\, dx$ $(x^{-5/2} - e^x + \frac{1}{x})$; $\int \frac{1+\cos^2 x}{1+\cos 2x}\, dx$ $(\frac{1}{2\cos^2 x}+\frac{1}{2})$; $\int \arcsin x + \arccos x\, dx$ $(\frac{\pi}{2})$; $\int \frac{dx}{2x^2+9}$ $(\frac{1}{9}\frac{1}{(\frac{\sqrt{2}x}{3})^2+1})$; $\int \sin^4 x\, dx$ $((\frac{1-\cos 2x}{2})^2 = \frac{1}{4} - \cos 2x + \frac{1}{4}\frac{1+\cos 2x}{2})$.

2. *Érdemes-e helyettesíteni?*

a) A helyettesítéses integrál formulát „rövidítő irányban” akkor használhatjuk, ha az integranduszban szereplő egyik kifejezés deriváltja is szerepel vagy kialakítható.

Példák: $\int \frac{x}{\sqrt{1-x^4}}\, dx$ $(u = x^2, 2x\ \ dx = du)$; $\int e^{\sin x}\cos x\, dx$ $(u = \sin x,\ \cos x\, dx = du)$; $\int \frac{\operatorname{arctg}^2 x}{1+x^2}\, dx$ $(u = \operatorname{arctg} x,\ \frac{1}{1+x^2}\, dx = du)$; $\int \frac{\sin 2x}{1+\cos^2 x}\, dx$ $(u = \cos x,\ -\sin x\, dx = du)$; $\int \frac{dx}{x\log x}$ $(u = \log x,\ \frac{1}{x}\, dx = du)$; $\int \frac{(6x-5)\, dx}{2\sqrt{3x^2-5x+6}}$ $(u = 3x^2 - 5x + 6,\ (6x-5)\, dx = du)$; $\int \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\, dx$ $(u = \sqrt{x},\ \frac{1}{2\sqrt{x}}\, dx = du)$; $\int \frac{\log \operatorname{tg} x}{\sin x \cos x}\, dx$ $(\frac{1}{\cos^2 x}\frac{\log \operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} x},\ \operatorname{tg} x = u,\ \frac{1}{\cos^2 x}\, dx = du)$.

b) A helyettesítéses integrál formulát „hosszabbító irányban” bármikor használhatjuk. Jobb ötlet híján helyettesítsük a „legrondább” részt!

Példák: $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$ $(\sqrt{x} = u,\ x = u^2,\ dx = 2u\, du)$; $\int \frac{\sqrt{1+\log x}}{x\log x}\, dx$ $(\sqrt{1+\log x} = u,\ x = e^{u^2-1},\ dx = e^{u^2-1}2u\, du)$; $\int \frac{dx}{\sqrt{1+e^x}}$ $(e^x = u,\ dx = \frac{1}{u}\, du;\ \sqrt{1+u} = v,\ du = 2v\, dv)$; $\int \frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}$ $(\sqrt{x} = \sin u,\ x = \sin^2 u,\ dx = 2\sin u\cos u\, du$, majd parciális integrálás); $\int \sqrt{\frac{x}{1-x\sqrt{x}}}\, dx$ $(\sqrt{x} = u,\ dx = 2u\, du,\ u^3 = v,\ 3u^2\, du = dv)$; $\int \sqrt[3]{\frac{1-x}{1+x}}\frac{dx}{x}$ $(\sqrt[3]{\frac{1-x}{1+x}} = u,\ dx = \frac{-6u^2}{(1+u^3)^2},\ u^3 = v,\ 3u^2\, du = dv)$; $\int \arccos\sqrt{\frac{x}{x+1}}\, dx$ $(\sqrt{\frac{x}{x+1}} = u,\ dx = \frac{2u}{(1-u^2)^2}\, du,\ u = \cos v$, majd parciális integrálás); $\int \frac{e^{2x}\, dx}{\sqrt[4]{e^x+1}}$ $(\sqrt[4]{e^x+1} = u,\ e^x = u^4 - 1,\ dx = \frac{4u^3}{u^4-1})$.

3. *Érdemes-e a parciális integrál formulát alkalmazni?*

Figyeljünk a „szereposztásra”: f' legyen az a tényező, amit könnyen primitiválhatunk, g az a tényező, amelyiknek a deriváltja egyszerűbb feladatra vezet.

Példák: $\int x \operatorname{arctg} x\, dx$ $(f' = x,\ g = \operatorname{arctg} x)$; $\log(x^2+1)\, dx$ $(f' = 1,\ g = \log(x^2+1))$; $\int x^2\cos^2 x\, dx$ $(g = x^2,\ f' = \cos^2 x$, utána $g = x,\ f' = \ldots$, így tisztán trigonometrikus feladatot kapunk); $\int \frac{\log^2 x}{\sqrt{x^5}}\,dx$ $(f' = x^{-5/2},\ g = \log^2 x,\ f' = x^{-5/2},\ g = \log x)$; $\int e^{2x}\cos 3x\,dx$ $(f' = e^{2x},\ g = \dots$ kétszer, átrendezve az eredeti feladat kifejezhető); $\int x^2 e^x \sin x\,dx$ $(f' = e^x \sin x,\ g = x^2$; f külön számolható, mint az előző példában, utána $f' = \dots,\ g = x)$; $\int \frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}\,dx$ $(f' = (1-x)^{-1/2},\ g = \arcsin\sqrt{x})$; $\int \sin\log x\,dx$ $(f' = 1, g = \dots$ kétszer, majd átrendezünk).

4. *Alkalmazható-e valamelyik általános módszer?*

Ha igen, alkalmazzuk – ez esetleg hosszadalmas, de bizonyosan működő megoldás. Ha nem, a „receptek" ötletet adhatnak a továbblépéshez.

* * *

Receptek

1. *Rekurzív formulák*

Általában parciális integrálásra épülnek, az alapötletet érdemes megjegyezni.

a) $I_n := \int \frac{1}{(1+x^2)^n}\,dx$

$$I_n = \int \frac{1+x^2-x^2}{(1+x^2)^n}\,dx = I_{n-1} - \int x\frac{x}{(1+x^2)^n}\,dx,$$

és legyen $f' = \frac{x}{(1+x^2)^n}$, $g = x$, ebből $f = \frac{1}{-n+1}\frac{1}{2}\frac{1}{(1+x^2)^{n-1}}$ és $g' = 1$,

$$I_n = I_{n-1} - \frac{1}{2-2n}\frac{x}{(1+x^2)^{n-1}} + \frac{1}{2-2n}I_{n-1},$$

azaz I_n kifejezhető rekurzív módon, az I_{n-1} segítségével; továbbá, nyilván $I_1 = \operatorname{arctg} x$.
Hasonló rekurzióval kereshetjük a $J_n := \int \frac{1}{(1-x^2)^n}\,dx$ primitív függvényeket is; persze ez a feladat elemi törtekre bontással is megoldható.

b) $S_n := \int \sin^n x\,dx$

$$S_n = \int \sin^n x\,dx = \int \sin x \sin^{n-1} x\,dx,$$

legyen $f' = \sin x$, $g = \sin^{n-1} x$, ekkor $f = -\cos x$, $g' = (n-1)\sin^{n-2} x\cos x$, és azt kapjuk, hogy

$$S_n = -\cos x\sin^{n-1} x + \int (n-1)\sin^{n-2} x(1-\sin^2 x)\,dx,$$

ebből

$$S_n = -\cos x\sin^{n-1} x + (n-1)S_{n-2} - (n-1)S_n$$

és innen S_n-et kifejezhetjük. A rekurzió kettesével lépked, a kezdőértékek

$$S_1 = -\cos x, \quad S_2 = \int \sin^2 x\, dx = \int \frac{1-\cos 2x}{2}\, dx = \frac{1}{2}x - \frac{\sin 2x}{4}.$$

Az ötlet akkor is működik, ha n negatív, ekkor S_{n-2}-t fejezzük ki.

Persze ha n páratlan, akkor egyszerűbb helyettesíteni, $S_n = \int \sin x (\sin^2 x)^k\, dx = -\int (1-u^2)^k\, du$, ahol $u = \cos x$.

A $C_n := \int \cos^n x\, dx$ hasonló módon kezelhető.

c) $T_n := \int \mathrm{tg}^n\, x\, dx$

Ha $n \neq 1$,

$$T_n = \int \mathrm{tg}^n\, x\, dx = \int \mathrm{tg}^2\, x\, \mathrm{tg}^{n-2}\, x\, dx = \int \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}\, \mathrm{tg}^{n-2}\, x\, dx = \frac{1}{n-1}\, \mathrm{tg}^{n-1}\, x - T_{n-2},$$

ez is kettesével lépkedő rekurzió, a kezdőértékek

$$T_1 = \int \mathrm{tg}\, x\, dx = \log \cos x, \quad T_2 = \int \mathrm{tg}^2\, x\, dx = \int \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}\, dx = \mathrm{tg}\, x - x.$$

2. *Racionális törtfüggvények*

Az $\int \frac{P(x)}{Q(x)}\, dx$ feladatról van tehát szó, ahol P és Q polinomok.

A következő lépéseket végezzük:

a) Ha P fokszáma nem kisebb mint Q fokszáma, polinomosztással kapjuk, hogy $\frac{P(x)}{Q(x)} = q(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}$, ahol q és R is polinomok, R foka kisebb, mint Q foka. Az $\int q(x)\, dx$ könnyen felírható.

b) A $Q(x)$ nevezőt első- és másodfokú tényezők szorzatára bontjuk.

c) $\frac{R(x)}{Q(x)}$-et felírjuk elemi törtek összegeként.

d) Az elemi törteket külön-külön könnyen primitiválhatjuk a tanult módon.

3. *Racionalizáló helyettesítések*

Itt és a továbbiakban R „racionális függvényt” jelöl, azaz olyan függvényt, amely az argumentumaiból és konstansokból a négy alapművelet véges sokszori alkalmazásával előállítható.

a) $R(\sin x, \cos x)$

Az $u = \mathrm{tg}\, \frac{x}{2}$ helyettesítéssel (ekkor $\sin x = \frac{2u}{1+u^2}$, $\cos x = \frac{1-u^2}{1+u^2}$, $dx = \frac{2}{1+u^2}\, du$) kapjuk, hogy $\int R(\sin x, \cos x)\, dx = \int R(\frac{2u}{1+u^2}, \frac{1-u^2}{1+u^2}) \frac{2}{1+u^2}\, du = \int \frac{P(u)}{Q(u)}\, du$, azaz racionális törtfüggvényhez jutottunk, alkalmazhatjuk a 2) pont lépéseit.

Ha $R(-\sin x, \cos x) = R(\sin x, \cos x)$, azaz az integrandusz $\sin x$-ben páratlan, a $\cos x = u$ helyettesítés is elég. (Egy $\sin x$ tényezőt leválasztunk, $\sin x\, dx = du$, és $\sin^2 x = 1 - u^2$).

Hasonlóan, ha az integrandusz $\cos x$-ben páratlan, akkor $\sin x$-et helyettesítünk.

Ha $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$, azaz az integrandusz $\cos x$-ben és $\sin x$-ben is páros, $u = \operatorname{tg} x$-et helyettesíthetünk, ekkor $\sin^2 x = \frac{u^2}{1+u^2}$, $\cos^2 x = \frac{1}{1+u^2}$ és $dx = \frac{1}{1+u^2}\, du$.

b) $R(x, \sqrt[n_1]{\frac{ax+b}{cx+d}}, \sqrt[n_2]{\frac{ax+b}{cx+d}}, \ldots)$

(Tehát a primitiválandó függvény x-nek, valamint az $\frac{ax+b}{cx+d}$ „törtlineáris" kifejezés különböző gyökeinek „racionális keveréke".) Legyen az n_1, n_2, ... gyökkitevők legkisebb közös többszöröse k, és legyen $\sqrt[k]{\frac{ax+b}{cx+d}} = u$. Ekkor $x = \frac{b-d\cdot u^k}{c\cdot u^k - a}$, a helyettesítést végrehajtva a feladat $\int \frac{P(u)}{Q(u)}\, du$ alakúvá válik, a 2) pont alkalmazható.

c) $R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})$

(i) Az ún. Euler-féle helyettesítések a következők:

i1) Ha $a > 0$, legyen $\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{a}x + u$, ekkor $bx + c = 2\sqrt{a}xu + u^2$, $x = \frac{c-u^2}{2\sqrt{a}u - b}$.

i2) Ha $c > 0$, legyen $\sqrt{ax^2+bx+c} = xu + \sqrt{c}$, ekkor $ax^2 + bx = x^2 + u + 2xu\sqrt{c}$, $x = \frac{2\sqrt{c}u - b}{a - u^2}$.

i3) Ha $a, c < 0$, akkor $\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{a(x-x_1)(x-x_2)} = (x - x_1)\sqrt{a\frac{x-x_2}{x-x_1}}$, és használhatjuk a b) pont módszerét. (Az i3) esetben kell hogy legyen gyöke az $ax^2 + bx + c$ polinomnak, hiszen ha nem volna, a négyzetgyökös kifejezés sehol sem volna értelmezhető.)

Mindhárom esetben racionális törtfüggvenyre vezettük visza a feladatot. Jegyezzük meg, hogy általában az i1) helyettesítés a technikailag legegyszerűbb, az i3) a legnehézkesebb.

(ii) Sokszor egyszerűbb, ha a gyökjel alatt álló kifejezést teljes négyzetté egészítjük ki. Például $\sqrt{2x^2+12x+26} = \sqrt{2(x+3)^2+8} = \sqrt{2}\sqrt{(x+3)^2+4} = \sqrt{2}\cdot 2\cdot\sqrt{(\frac{x+3}{2})^2+1}$ és az $\frac{x+3}{2} = u$ helyettesítéssel azt kapjuk, hogy $\int R(x, \sqrt{2x^2+12x+26})\, dx = \int R(2u-3, \sqrt{u^2+1})\, 2\, du$.

A teljes négyzetté alakítás után az a, b, c konstansok értékeitől függően az alábbi esetek valamelyikéhez jutunk:

ii1) $R(u, \sqrt{1-u^2}\,)$. Ekkor az $u = \sin v$ helyettesítéssel dolgozva, $\sqrt{1-u^2} = \cos v$, $du = \cos v\, dv$.

ii2) $R(u, \sqrt{u^2-1}\,)$. Legyen $u = \frac{1}{\sin v}$, ekkor $\sqrt{u^2-1} = \frac{\cos v}{\sin v}$ és $du = \frac{-1}{\sin^2 v}\cos v\, dv$.

ii3) $R(u, \sqrt{1+u^2})$. Legyen most $u = \operatorname{tg} v$, ekkor $\sqrt{1+u^2} = \frac{1}{\cos v}$ és $du = \frac{1}{\cos^2 v} dv$.

Mindhárom esetben a $\sin v$ és $\cos v$ „racionális keverékét" kaptuk, tehát a 3a) pont módszere biztosan alkalmazható (de az is lehet, hogy valamilyen trigonometrikus átalakítással hamarabb célhoz érünk).