Matematika I. – 13. gyakorló feladatsor

Gazdálkodási és közgazdász szakos I. évf. hallgatók számára

A határozott integrál alkalmazása

1. **Feladat.** Határozzuk meg az $y = \sqrt{x}$ függvény és az X tengely által határozott területet az $a = 4$-től $b = 9$ abszcisszájú pontig!

2. **Feladat.** Határozzuk meg az $y = \dfrac{1}{x^2}$ függvény görbéje és az X tengely közé eső területet, ha az intervallumok a következők: $[0; \infty], [0; 10], [10; \infty]$.

3. **Feladat.** Mekkora az $f(x) = \sin(x)$ függvény $[0; \pi]$ intervallumhoz tartozó grafikonja és az X tengely által határolt idom területe? Mekkora ez a terület a $[0; 2\pi]$ intervallumon?

4. **Feladat.** Mekkora területű idomot zár közre az
$$f(x) = 4 + 3x - x^2$$
függvény grafikonja és az X tengely?

5. **Feladat.** Számítsuk ki annak az idomnak a területét, amelyet az
$$y^2 - y + x - 6 = 0, \qquad x > 0$$
egyenletű görbe és az Y tengely zár közre!

6. **Feladat.** Mekkora területű idomot zár közre az
$$f(x) = x^4 - 5x^2 + 4$$
függvény grafikonja és az X tengely?

7. **Feladat.** Számítsuk ki, hogy a milyen értéke esetén lesz az $f(x) = \dfrac{1}{1 + x^2}$ grafikonja és az $x = -a$, $x = a$ és $y = 0$ egyenletű egyenesek által közrezárt idom területe 2 egység?

8. **Feladat.** Legyen $M_1 = \{(x, y) \,|\, y \geq x^2\}$ és $M_2 = \{(x, y) \,|\, y \leq x + 2\}$. Ábrázoljuk az XY síkon az $M_1 \cap M_2$ halmazt, majd számítsuk ki ennek a területét!

9. **Feladat.** Ábrázoljuk ugyanabban a koordináta-rendszerben az $f(x) = \sin(x)$ és a $g(x) = \cos(x)$ függvényt! Számítsuk ki, hogy mekkora területűek az e görbék által közrezárt tartományok!

10. **Feladat.** Határozzuk meg az

    (a) $y = x^2, \quad y^2 = x$
    (b) $y = x^3, \quad y^2 = x$
    (c) $y = x^2, \quad y = 3 - 2x^2$
    (d) $y = x^2, \quad y = 20 - x^2$
    (e) $y = \sqrt{x}, \quad y = x^2 - \dfrac{7}{2}x$
    (f) $y = \dfrac{2}{1 + x^2}, \quad y = \dfrac{x^2}{2}$

    görbék által határolt idomok területét!

11. **Feladat.** Határozzuk meg az $y = \sin(x)$ függvény görbéjének X-tengely körüli forgatásával keletkező test térfogatát, ha a határok 0 és π!

12. **Feladat.** Az $y = x^2$ egyenletű parabola $[0; 2]$ intervallum fölötti ívét forgassuk meg az X tengely körül. Mekkora a kapott forgástest térfogata?

13. **Feladat.** Forgassuk meg az előző feladatban adott görbeszakaszt az Y tengely körül. Mekkora térfogatú testet kapunk?

14. **Feladat.** Határozzuk meg az $y = \ln(x)$ függvény X-tengely körüli forgatásakor keletkező forgástest $[2; 6]$ abszcisszájú pontok által határolt részének térfogatát!

15. **Feladat.** Határozzuk meg az $y = \ln(x)$ függvény Y-tengely körüli forgatásakor a $[0; 6]$ ordináták között keletkező test térfogatát!

16. **Feladat.** Határozzuk meg az $y = \dfrac{2}{\sqrt{x}}$ függvény görbéjének X-tengely körüli forgatáskor az $1 \leq x \leq 4$ szakaszon keletkező forgástest térfogatát!

17. **Feladat.** Mekkora térfogatú az a kúp, amely az

$$\frac{x}{4} + \frac{y}{2} = 1$$

egyenletű egyenes első síknegyedbe eső részének X tengely körüli megforgatásával keletkezik?

18. **Feladat.** Forgassuk meg az X tengely körül az

$$f(x) = 4 + \sin^2(x), \qquad 0 \leq x \leq 4\pi$$

függvény görbéjét. Mekkora térfogatú testet kapunk?

19. **Feladat.** Forgassuk meg az Y tengely körül az

$$y = 8 - 2x - x^2$$

egyenletű parabola első síknegyedbe eső részét. Mekkora térfogatú test keletkezik?

20. **Feladat.** Vezessük le az r sugarú, m magasságú egyenes körkúp térfogatának ismert képletét az integrálszámítás segítségével!

21. **Feladat.** Vezessük le az m magasságú csonkakúp térfogatképletét az integrálszámítás segítségével, ha az alapkör sugarát R, a fedőkör sugarát pedig r jelöli!

Jó munkát!