



# Skaláris szorzat az $R^n$ vektortérben

---

*Összeállította: dr. Leitold Adrien  
egyetemi docens*



# Vektorok skaláris szorzata

---

- Két  $R^n$ -beli vektor skaláris szorzata:

Legyen  $\underline{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$  és  $\underline{b} = (b_1, b_2, \dots, b_n)$  két  $R^n$ -beli vektor. Ekkor az  $\underline{a}$  és  $\underline{b}$  vektorok **skaláris szorzatán** (skalárszorzatán) az alábbi számot értjük:

$$a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + \dots + a_n \cdot b_n$$

Jelölés:  $\underline{a} \cdot \underline{b}$ ,  $\langle \underline{a}, \underline{b} \rangle$

# A skaláris szorzat alaptulajdonságai

## ■ A skaláris szorzat alaptulajdonságai:

Legyenek  $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c} \in R^n$  és  $\lambda \in R$ . Ekkor:

1.  $\langle \underline{a}, \underline{b} + \underline{c} \rangle = \langle \underline{a}, \underline{b} \rangle + \langle \underline{a}, \underline{c} \rangle$

$$\langle \underline{a}, \lambda \cdot \underline{b} \rangle = \lambda \cdot \langle \underline{a}, \underline{b} \rangle$$

$$\langle \underline{a} + \underline{b}, \underline{c} \rangle = \langle \underline{a}, \underline{c} \rangle + \langle \underline{b}, \underline{c} \rangle$$

$$\langle \lambda \cdot \underline{a}, \underline{b} \rangle = \lambda \cdot \langle \underline{a}, \underline{b} \rangle$$

2.  $\langle \underline{a}, \underline{b} \rangle = \langle \underline{b}, \underline{a} \rangle$

3.  $\langle \underline{a}, \underline{a} \rangle \geq 0$  és  $\langle \underline{a}, \underline{a} \rangle = 0 \Leftrightarrow \underline{a} = \underline{o}$

**bilineáris  
szimmetrikus**

**pozitív definit**

# Vektorok hossza

- Egy  $R^n$ -beli vektor hossza (normája):

Legyen  $\underline{x} \in R^n$ . Ekkor az  $\underline{x}$  vektor hossza (normája):

$$\sqrt{\langle \underline{x}, \underline{x} \rangle} = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$$

Jelölés:  $|\underline{x}|$ ,  $\|\underline{x}\|$

- **Megjegyzések:** Legyen  $\underline{x} \in R^n$  és  $\lambda \in R$ .

1. A fenti definíció és a skaláris szorzat pozitív definitésége miatt  $\|\underline{x}\| \geq 0$  és  $\|\underline{x}\|=0 \Leftrightarrow \underline{x} = \underline{o}$ .
2. Igazolható, hogy  $\|\lambda \cdot \underline{x}\| = |\lambda| \cdot \|\underline{x}\|$ .

- Egy  $\underline{x} \in R^n$  vektort **egységre normálnak** (egységvektornak) nevezünk, ha  $\|\underline{x}\|=1$ .

- Igazolható, hogy bármely  $\underline{x} \in R^n$ ,  $\underline{x} \neq \underline{o}$  esetén az  $\frac{1}{\|\underline{x}\|} \cdot \underline{x}$  vektor egységre normált.

## Nevezetes egyenlőtlenségek

- Cauchy-Bunyakovszkij- Schwarz egyenlőtlenség:

Legyen  $\underline{x}$  és  $\underline{y}$  két tetszőleges  $R^n$ -beli vektor. Ekkor:

$$|\langle \underline{x}, \underline{y} \rangle| \leq \|\underline{x}\| \cdot \|\underline{y}\|, \text{ azaz}$$

$$\left| \sum_{i=1}^n x_i \cdot y_i \right| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^n y_i^2},$$

és egyenlőség pontosan akkor áll fenn, ha  $\underline{x} \parallel \underline{y}$ .

- Minkowsky (vagy háromszög) egyenlőtlenség:

Legyen  $\underline{x}$  és  $\underline{y}$  két tetszőleges  $R^n$ -beli vektor. Ekkor:

$$\|\underline{x} + \underline{y}\| \leq \|\underline{x}\| + \|\underline{y}\|.$$



# Két vektor szöge

- Két  $R^n$ -beli vektor szöge

Legyen  $\underline{a}$  és  $\underline{b}$  két, nullvektortól különböző  $R^n$ -beli vektor. Ekkor azt a  $\varphi \in [0, \pi]$  szöveget, melyre

$$\cos \varphi = \frac{\langle \underline{a}, \underline{b} \rangle}{\|\underline{a}\| \cdot \|\underline{b}\|}$$

teljesül, az  $\underline{a}$  és  $\underline{b}$  vektorok szögének nevezzük.

- **Speciális esetek:** Legyenek  $\underline{a}, \underline{b} \in R^n$ ,  $\underline{a}, \underline{b} \neq \underline{o}$ .

- Ha  $\langle \underline{a}, \underline{b} \rangle = 0$ , akkor  $\varphi = \pi/2$ .

- Ha  $\underline{a} = \lambda \cdot \underline{b}$ , akkor

- $\lambda > 0$  esetén  $\varphi = 0$ , ilyenkor  $\underline{a}$  és  $\underline{b}$  **egyirányú**,

- $\lambda < 0$  esetén  $\varphi = \pi$ , ilyenkor  $\underline{a}$  és  $\underline{b}$  **ellentétes**.



## További állítások

---

1. Legyenek  $\underline{x}, \underline{y} \in R^n$ ,  $\underline{x}, \underline{y} \neq \underline{0}$ , jelölje  $\varphi$  az  $\underline{x}$  és  $\underline{y}$  vektorok szögét. Ekkor:

$$\|\underline{x}-\underline{y}\|^2 = \|\underline{x}\|^2 + \|\underline{y}\|^2 - 2\cdot\|\underline{x}\|\cdot\|\underline{y}\|\cdot\cos\varphi \quad \text{„cosinus-tétel”}$$

2. Legyenek  $\underline{x}, \underline{y} \in R^n$ ,  $\underline{x}, \underline{y} \neq \underline{0}$ , jelölje  $\varphi$  az  $\underline{x}$  és  $\underline{y}$  vektorok szögét és legyen  $\varphi = \pi/2$ . Ekkor:

$$\|\underline{x}-\underline{y}\|^2 = \|\underline{x}\|^2 + \|\underline{y}\|^2 \quad \text{„Pitagorasz-tétel”}$$

3. Legyenek  $\underline{x}, \underline{y} \in R^n$ ,  $\underline{x}, \underline{y} \neq \underline{0}$ . Ekkor:

$$\|\underline{x}-\underline{y}\|^2 + \|\underline{x}+\underline{y}\|^2 = 2\cdot\|\underline{x}\|^2 + 2\cdot\|\underline{y}\|^2$$

„paralelogramma-szabály”



# Ortogonalitás

1. Legyen  $\underline{a}$  és  $\underline{b}$  két  $R^n$ -beli vektor. Az  $\underline{a}$  és  $\underline{b}$  vektorokat ortogonálisaknak nevezzük, ha skaláris szorzatuk nulla.
2. Egy  $H \subseteq R^n$  vektorhalmaz ortogonális, ha páronként ortogonális, nullvektortól különböző vektorok alkotják.
3. Egy  $H \subseteq R^n$  vektorhalmaz ortonormált, ha ortogonális és vektorai egységre normáltak.

## Megjegyzések:

1.  $\underline{a}$  és  $\underline{b}$  ortogonális  $\Leftrightarrow \varphi = \pi/2$  vagy  $\underline{a} = \underline{o}$  vagy  $\underline{b} = \underline{o}$ .
2.  $R^n$ -ben a kanonikus bázis ortonormált.
3. Igazolható, hogy ha a  $H \subseteq R^n$  vektorhalmaz ortogonális, akkor  $H$  lineárisan független.
4. Legyen  $B = \{\underline{b}_1, \dots, \underline{b}_n\}$  ortonormált bázis  $R^n$ -ben. Ekkor egy  $\underline{x} \in R^n$  vektor  $B$  bázisra vonatkozó  $i$ -edik koordinátája:  $\langle \underline{x}, \underline{b}_i \rangle$





## Fourier-együttható

Legyen  $\underline{v} \in R^n$ ,  $\underline{v} \neq \underline{0}$  rögzített vektor. Ekkor igazolható, hogy bármely  $\underline{x} \in R^n$  vektor esetén egyértelműen létezik egy olyan  $\alpha \in R$  szám, amelyre az  $\underline{x} - \alpha \cdot \underline{v}$  vektor és a  $\underline{v}$  vektor ortogonális. Mégpedig:

$$\alpha = \frac{\langle \underline{x}, \underline{v} \rangle}{\langle \underline{v}, \underline{v} \rangle}$$

Ezt az  $\alpha$  számot az  $\underline{x}$  vektor  $\underline{v}$  vektorra vonatkozó Fourier-együtthatójának nevezzük.

**Megjegyzés:** Ekkor az  $\alpha \cdot \underline{v}$  vektor az  $\underline{x}$  vektor  $\underline{v}$  irányába eső merőleges vetületvektora.



# Ortogonalis komplementer

Legyen  $S \subseteq R^n$ ,  $S \neq \emptyset$ .

1. Az  $\underline{x} \in R^n$  vektort  $S$ -re ortogonálisnak hívjuk, ha  $\underline{x}$  ortogonális az  $S$  vektorhalmaz minden vektorára.
2. Az  $S$  vektorhalmaz ortogonális komplementere az  $S$ -re ortogonális vektorok összessége:

$$S^\perp = \{ \underline{x} \in R^n \mid \text{bármely } \underline{s} \in S \text{ esetén } \langle \underline{x}, \underline{s} \rangle = 0 \} .$$

**Megjegyzés:**

Igazolható, hogy bármely  $S \subseteq R^n$ ,  $S \neq \emptyset$  vektorhalmaz esetén  $S^\perp$  altér  $R^n$ -ben.



## Az ortogonális felbontás tétele

---

Legyen  $H$  altér az  $R^n$  vektortérben. Ekkor:

1.  $R^n$  direkt összege a  $H$  és  $H^\perp$  altereknek:

$$R^n = H \oplus H^\perp.$$

2. Legyen  $\underline{x} \in R^n$ ,  $\underline{x} = \underline{h} + \underline{h}^\perp$ , ahol  $\underline{h} \in H$  és  $\underline{h}^\perp \in H^\perp$ .

Ekkor:  $\|\underline{x}\|^2 = \|\underline{h}\|^2 + \|\underline{h}^\perp\|^2$ .

3. A  $H^\perp$  altér ortogonális komplementere  $H$ , azaz:

$$H^{\perp\perp} = H.$$



## Az ortogonális projekció

---

Legyen  $H$  altér az  $R^n$  vektortérben.

Tekintsük a következő leképezést:

$$\pi: R^n \rightarrow R^n, \underline{x} \mapsto \underline{h},$$

$$\text{ahol } \underline{x} = \underline{h} + \underline{h}^\perp \text{ és } \underline{h} \in H, \underline{h}^\perp \in H^\perp.$$

A fenti leképezést a  $H$  altérre való ortogonális projekciónak (merőleges vetítésnek) nevezzük.

A  $\pi(\underline{x})$  vektort az  $\underline{x}$  vektor  $H$  altérre eső ortogonális vetületvektorának hívjuk.



## Az ortogonális projekció tulajdonságai

Az előző definíció jelöléseit megtartva a  $\pi$  ortogonális projekció tulajdonságai:

1.  $\pi$  lineáris transzformáció
2.  $\pi \circ \pi = \pi$
3.  $\pi|_H = id|_H$ ,  $\pi|_{H^\perp} = 0$  (azonosan nulla leképezés)
4. Bármely  $\underline{x}, \underline{y} \in R^n$  esetén:  $\langle \pi(\underline{x}), \underline{y} \rangle = \langle \underline{x}, \pi(\underline{y}) \rangle$
5. Bessel-egyenlőtlenség:  $\|\pi(\underline{x})\| \leq \|\underline{x}\|$
6. A legjobb approximáció tétele: bármely  $\underline{x} \in R^n$  esetén a  $\pi(\underline{x})$  vetületvektor az  $\underline{x}$ -hez legközelebb eső  $H$ -beli vektor, azaz: bármely  $\underline{y} \in H$ -ra  $\|\underline{x} - \pi(\underline{x})\| \leq \|\underline{x} - \underline{y}\|$  és egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha  $\underline{y} = \pi(\underline{x})$ .