Bevezetés a matematikába I. - VEMIMAP146B

III. Relációk

Hartung Ferenc

Pannon Egyetem
Matematika Tanszék

2018

Definíció:

*Az A halmazon definiált **reláción** az A-ból A-ba történő megfeleltetéseket értjük.*

Példa:

Legyen A egy nem üres halmaz, $\rho_1 = \{(a, b) \in A \times A : a = b\}$

Példa:

$\rho_2 = \{(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : a \leq b\}$

Példa:

$\rho_3 = \{(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : a < b\}$

Példa:

$\rho_4 = \{(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : |a - b| \leq 1\}$

Példa:

$\rho_5 = \{(m, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : m \text{ osztója } n\text{-nek}\}$
(Erre a relációra az $m|n$ jelölést szokás használni.)

Példa:

$\rho_6 = \{(m, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : m \text{ osztója } n\text{-nek}\}$

Legyen X egy sík egyeneseinek halmaza.

Példa:

$\rho_7 = \{(e, f) \in X \times X : e \text{ és } f \text{ merőlegesek}\}$
(Erre a relációra az $e \perp f$ jelölést szokás használni.)

Példa:

$\rho_8 = \{(e, f) \in X \times X : e \text{ és } f \text{ párhuzamosak}\}$
(Erre a relációra az $e \parallel f$ jelölést szokás használni.)

Legyen Y Magyarország lakosainak a halmaza (egy adott időpillanatban).

Példa:

$\rho_9 = \{(x, y) \in Y \times Y : x \text{ és } y \text{ testvérek}\}$

Példa:

$\rho_{10} = \{(x, y) \in Y \times Y : x \text{ gyermeke } y\text{-nak}\}$

Példa:

$\rho_{11} = \{(x, y) \in Y \times Y : x \text{ és } y \text{ ugyanazon a településen lakik}\}$ (tegyük fel, hogy mindenki településen lakik)

Definíció:

A ρ reláció reflexív, ha $(a, a) \in \rho$ minden $a \in A$-ra.

Definíció:

A ρ reláció szimmetrikus, ha $(a, b) \in \rho$, akkor $(b, a) \in \rho$ is teljesül minden $a, b \in A$-ra.

Definíció:

A ρ reláció antiszimmetrikus, ha $(a, b) \in \rho$ és $(b, a) \in \rho$ esetén $a = b$ következik minden $a, b \in A$-ra.

Definíció:

A ρ reláció tranzitív, ha $(a, b) \in \rho$ és $(b, c) \in \rho$ esetén $(a, c) \in \rho$ következik minden $a, b, c \in A$-ra.

Definíció:

A ρ reláció dichotom, ha minden $a, b \in A$-ra $(a, b) \in \rho$ vagy $(b, a) \in \rho$.

Példa:

ρ_1: reflexív, szimmetrikus, antiszimmetrikus, tranzitív, nem dichotom

Példa:

ρ_2: reflexív, nem szimmetrikus, antiszimmetrikus, tranzitív, dichotom

Példa:

ρ_3: nem reflexív, nem szimmetrikus, antiszimmetrikus, tranzitív, nem dichotom

Példa:

ρ_4: reflexív, szimmetrikus, nem antiszimmetrikus, nem tranzitív, nem dichotom

Példa:

ρ_5: reflexív, nem szimmetrikus, nem antiszimmetrikus, tranzitív, nem dichotom

Példa:

ρ_6: reflexív, nem szimmetrikus, antiszimmetrikus, tranzitív, nem dichotom

Példa:

ρ_7: nem reflexív, szimmetrikus, nem antiszimmetrikus, nem tranzitív, nem dichotom

Példa:

ρ_8: reflexív, szimmetrikus, nem antiszimmetrikus, tranzitív, nem dichotom

Példa:

ρ_9: nem reflexív, szimmetrikus, nem antiszimmetrikus, tranzitív (ha a testvét fogalmát úgy értelmezzük, hogy az apa és anya is azonos), nem dichotom

Példa:

ρ_{10}: nem reflexív, nem szimmetrikus, antiszimmetrikus, nem tranzitív, nem dichotom

Példa:

ρ_{11}: reflexív, szimmetrikus, nem antiszimmetrikus, tranzitív, nem dichotom

Definíció:

*Legyen A egy halmaz, ρ egy reláció A-n. Ekkor az (A, ρ) rendezett párt **irányított gráfnak** hívjuk. Az A halmaz elemeit a gráf **pontjainak**, a ρ relációt pedig a gráf **éleinek** nevezzük. Egy $(a, b) \in \rho$ él esetében az a pontot az él **kezdőpontjának**, a b pontot pedig az él **végpontjának** hívjuk. Egy (a, a) élt **hurokélnek** nevezünk.*

A jelen előadásban minden gráf irányított gráf lesz, de az egyszerűség kedvéért ezeket csak gráfoknak fogjuk nevezni.

Definíció:

*A $G = (A, \rho)$ gráf éleiből álló $e_1, e_2, \ldots, e_n$ véges sorozatot **irányított sétának** (a továbbiakban csak egyszerűen **sétának**) nevezünk, ha az e_i él végpontja megegyezik az e_{i+1} és kezdőpontjával minden $i = 1, 2, \ldots, n-1$-re. Ekkor a sétát n hosszú sétának hívjuk. Az e_1 és kezdőpontját a séta kezdőpontjának, az e_n és végpontját pedig a séta végpontjának hívjuk. A séta **nyitott séta** ha a kezdőpontja és a végpontja különböző. **Zárt sétát** kapunk, ha a séta kezdőpontja és végpontja azonos.*

Definíció:

A $G = (A, \rho)$ gráf éleiből álló $(a_0, a_1), (a_1, a_2), \ldots, (a_{n-1}, a_n)$ sétát irányított útnak (a továbbiakban csak egyszerűen útnak) nevezzük, ha az $a_0, a_1, \ldots, a_n$ pontok páronként különbözőek (kivéve esetleg az a_0 és a_n pontokat). Az út nyitott út, ha $a_0 \neq a_n$. Zárt útról beszélünk, ha $a_0 = a_n$. A zárt utat körnek hívjuk. Az út illetve kör hosszán a benne szereplő élek számát értjük.

Tétel:

Legyen ρ egy reláció az A halmazon, $G = (A, \rho)$ a reláció gráfja. Ekkor

1. *ρ akkor és csak akkor reflexív, ha a gárfja minden pontjában van hurokél.*
2. *ρ akkor és csak akkor szimmetrikus, ha a gárfjában két pont között van él, akkor a kép pont között mindig oda-vissza is van él.*
3. *ρ akkor és csak akkor antiszimmetrikus, ha a gárfjában két különböző pont között legfeljebb az egyik irányban lehet él.*
4. *ρ akkor és csak akkor tranzitív, ha a gárfjában bármely kettő hosszú séta esetében a kezdőpontból a végpontba mutató él is szerepel.*
5. *ρ akkor és csak akkor dichotom, ha a gárfjában bármely két pont között legalább az egyik irányban van él.*

Tétel:

Legyen ρ egy reláció az A halmazon, $G = (A, \rho)$ a reláció gráfja. Ekkor ρ akkor és csak akkor tranzitív, ha a gárfjában bármely (legalább 2 hosszú) séta esetében a kezdőpontból a végpontba mutató él is szerepel.

Definíció:

*Egy A halmazon értelmezett ρ relációt **részbenrendezésnek** hívunk, ha reflexív, antiszimmetrikus és tranzitív. Ekkor az (A, ρ) rendezett párt **részbenrendezett halmaznak** nevezzük.*

Példa:

$(\mathbb{R}, \leq)$ részbenrendezett halmaz

Példa:

$(\mathbb{N}, |)$ részbenrendezett halmaz

Példa:

Legyen A egy halmaz. Ekkor $(\mathcal{P}(A), \subseteq)$ részbenrendezett halmaz

Legyen A egy halmaz, és jelöljön $\leq$ egy részbenrendezést A-n. Azt, hogy $(a, b) \in \leq$ úgy is jelöljük, hogy $a \leq b$. Használjuk az $a < b$ jelölést arra, ha $a \leq b$ teljesül és $a \neq b$.

Definíció:

Azt mondjuk, hogy b fedi a-t, ha $a < b$, és nincs olyan c elem, hogy $a < c < b$.

Példa:

Tekintsük az $(\mathbb{N}, \leq)$ részbenrendezett halmazt. Itt 5 fedi 4-et.

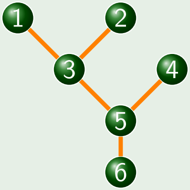
Példa:

Tekintsük az $(\mathbb{R}, \leq)$ részbenrendezett halmazt. Itt 5 nem fedi 4-et, hiszen például $4 < 4,5 < 5$.

Egy részbenrendezett halmaz Hasse-diagramja olyan ábra, ahol a síkbeli pontok reprezentálják a halmaz elemeit, és ahol az a és b pontok akkor vannak összekötve az ábrában (egy irányítatlan görbével), ha b fedi a-t. Ekkor a b pontot az a pontnál magasabbra rajzoljuk az ábrában. Az $x \leq y$ reláció esetén x és y össze vannak kötve egy (esetleg több ponton átmenő) görbével, és x alacsonyabban helyezkedik el az ábrában, mint az y.

Példa:

Tekintsük az $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ halmazon az alábbi Hasse-diagrammal definiált $\leq$ relációt:



Ekkor $3 \leq 1$, $3 \leq 2$, $5 \leq 3$, $5 \leq 4$ és $6 \leq 5$. Továbbá $5 \leq 1$, $5 \leq 2$, $6 \leq 1$, $6 \leq 2$, $6 \leq 3$, $6 \leq 4$ és $a \leq a$ is teljesül minden $a \in A$-ra. De pl. $2 \not\leq 4$.

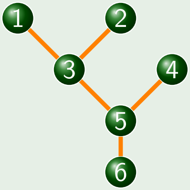
Legyen $(A, \leq)$ egy részbenrendezett halmaz.

Definíció:

Az a elemet ***maximális*** *elemnek hívjuk, ha nincs nála nagyobb elem. Az a elemet* ***minimális*** *elemnek hívjuk, ha nincs nála kisebb elem.*
Az a elemet ***legnagyobb*** *elemnek hívjuk, ha* $x \leq a$ *minden* $x \in A$*-ra. Az a elemet* ***legkisebb*** *elemnek hívjuk, ha* $a \leq x$ *minden* $x \in A$*-ra.*

Példa:

Tekintsük újra az előbbi Hasse-diagramot:



Ekkor 6 minimális és egyben legkisebb elem is. Az 1, 2 és 4 elemek mindegyike maximális elem, és nincs legnagyobb elem.

Tétel:

Egy részbenrendezett halmazban legfeljebb egy legnagyobb és legfeljebb egy legkisebb elem létezik.

Tétel:

Egy véges részbenrendezett halmazban mindig létezik maximális és minimális elem.

Definíció:

Egy $(A, \leq)$ rendezett halmazban az a és b elemek összehasonlíthatóak, ha vagy $a \leq b$ vagy $b \leq a$ teljesül.

Definíció:

Egy A halmazon definiált $\leq$ részbenrendezést rendezésnek hívunk, ha dichotom is, azaz bármely két elem összehasonlítható.

Egy rendezett halmaz Hasse-diagramja (amennyiben egyáltalán felrajzolható) egy láncból áll.

Példa:

Tekintsük a $(\mathbb{R}, \leq)$ részbenrendezett halmazt (a valós számokon érdelmezett szokásos $\leq$ relációval). Ez rendezett halmaz is, hiszen bármely két valós szám összehasonlítható ebben a részbenrendezésben.
Hasse-diagramot nem tudunk rajzolni, mivel nincsnek egymást fedő elemek a rendezésben (bármely két valós szám között létezik másik valós szám).

Definíció:

*Egy A halmazon definiált ρ relációt **ekvivalenciarelációnak** hívunk, ha reflexív, szimmetrikus és tranzitív.*

Példa:

Egy tetszőleges A nem üres halmazon tekintett $=$ (egyenlőség) reláció ekvivalenciareláció.

Példa:

A sík egyeneseinek halmazán a $\parallel$ (párhuzamosság) reláció ekvivalenciareláció.

Példa:

Magyarország lakosainak a halmazán az "ugyanazon a településen lakik" (ρ_{11} reláció egy korábbi példában) ekvivalenciareláció.

Legyen A egy halmaz, ρ egy ekvivalenciareláció A-n. Ekkor vezessük be a következő jelölést:

$$\bar{a} := \{b \in A : (a, b) \in \rho\},$$

azaz $\bar{a}$ azon A-beli elemek halmaza, amelyez az a elemmel a ρ relációban állnak. Az $\bar{a}$ halmazt az a elem ekvivalenciaosztályának nevezzük.

Tétel:

Legyen A egy halmaz, ρ egy reláció A-n, és legyen $\bar{a} := \{b \in A : (a, b) \in \rho\}$. Ekkor a ρ reláció akkor és csak akkor ekvivalenciareláció, ha

1. *$a \in \bar{a}$ minden $a \in A$-ra; és*
2. *minden $a_1, a_2 \in A$-ra $\overline{a_1} = \overline{a_2}$ vagy $\overline{a_1} \cap \overline{a_2} = \emptyset$.*

A fenti tétel szerint a különböző elemekhez tartozó ekvivalenciaosztályok vagy egybeesnek vagy diszjunktak.

Definíció:

Legyen A egy halmaz. Az A részhalmazaiból álló $\mathcal{C}$ halmazrendszert az A halmaz *osztályozásának* *nevezzük, ha*

1. *$\mathcal{C}$ elemei nem üres halmazok;*
2. *$\mathcal{C}$ elemei páronként diszjunktak;*
3. *$\mathcal{C}$ elemei uniója az A halmaz.*

A $\mathcal{C}$ halmazrendszer elemeit az osztályozás *osztályainak* *(vagy* *blokkjainak**) nevezzük.*

Az előző tétel szerint egy ekvivalenciareláció ekvivalenciaosztályai az alaphalmaz egy osztályozását alkotják.

Példa:

Legyen $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$. Ekkor a $\mathcal{C} = \{\{1, 3, 5\}, \{2\}, \{4, 9\}, \{6, 7, 8, 10\}\}$ halmazrendszer az A halmaz egy osztályozása.

Példa:

Egy tetszőleges A nem üres halmazon tekintsük az $=$ (egyenlőség) ekvivalenciarelációt. Ennek ekvivalenciaosztályai az $\{a\}$ egyelemű halmazok minden $a \in A$-ra. És fordítva is: ha egy ekvivalenciareláció minden ekvivalenciaosztálya egyelemű, akkor az az egyenlőség reláció.

Példa:

Tekintsük a sík egyeneseinek halmazán a $\|$ (párhuzamosság) ekvivalenciarelációt. Ennek végtelen sok ekvivalenciaosztálya van, és minden osztályban (az egymással párhuzamos) végtelen sok egyenes található.

Példa:

Tekintsük a Magyarország lakosainak a halmazán az "ugyanazon a településen lakik" (ρ_{11} reláció egy korábbi példában) ekvivalenciarelációt. Ennek ekvivalenciaosztályai az egyes települések lakosaiból áll. Itt különböző ekvivalenciaosztály általában különböző elemszámú lesz.

Példa:

Tekintsük a $\mathbb{Z}$ halmazon a $\rho = \{(m, n) \in \mathbb{Z}^2 : 3|(n-m)\}$ ekvivalenciarelációt. Ennek 3 különböző ekvivalenciaosztálya van: $\{\ldots, -6, -3, 0, 3, 6, \ldots\}$, $\{\ldots, -5, -2, 1, 4, 7, \ldots\}$ és a $\{\ldots, -4, -1, 2, 5, 8, \ldots\}$ halmazok. Az egyes ekvivalenciaosztályokban szereplő számok 3-mal osztva ugyanazt a maradékot adják: 0,1 illetve 2.

Tétel:

Legyen A egy halmaz, $\mathcal{C}$ az A halmaz egy osztályozása. Ekkor létezik pontosan egy ρ ekvivalenciareláció, amelynek ekvivalenciaosztályai megegyeznek $\mathcal{C}$ osztályaival.

Példa:

Legyen $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$, és tekintsük a $\mathcal{C} = \{\{1, 3, 5\}, \{2\}, \{4, 9\}, \{6, 7, 8, 10\}\}$ osztályozást az A halmazon. Ekkor az alábbi gráffal definiált ρ reláció ekvivalenciareláció az A halmazon, ahol $\mathcal{C}$ az ekvivalenciaosztályok halmaza: