Bevezetés a matematikába I. - VEMIMAP146B

IV. Logika

Hartung Ferenc

Pannon Egyetem
Matematika Tanszék

2018

Az ítélet olyan állítás, ami igaz vagy hamis. Azaz egy ítélet logikai értéke vagy igazságértéke igaz vagy hamis.

Példa:

Süt a nap.

Példa:

15 osztható 3-mal.

Példa:

Ma hétfő van.

elemi ítéletekből logikai műveletekkel összetett ítéleteket alkothatunk.

Példa:

Nem süt a nap.

A negáció (más szóval tagadás) logikai művelet jelölése: $\neg A$, definíciója:

A	$\neg A$
i	h
h	i

Példa:

Süt a nap és hétfő van.

A konjunkció (más szóval és) logikai művelet jelölése: $A \wedge B$, definíciója:

A	B	$A \wedge B$
i	i	i
i	h	h
h	i	h
h	h	h

Példa:

Süt a nap vagy esik az eső.

A diszjunkció (más szóval vagy) logikai művelet jelölése: $A \vee B$, definíciója:

A	B	$A \vee B$
i	i	i
i	h	i
h	i	i
h	h	h

A matematikai logikában a vagy műveletet a fenti "megengedő" értelemben definiáljuk. "Kizáró" vagy esetén az összetett ítélet pontosan akkor igaz, ha pontosan az egyik elemi ítélet igaz.

Példa:

Ha süt a nap, akkor elmegyünk ebédelni.

Példa:

Ha egy egész szám 0-ra végződik, akkor osztható 5-tel.

Az implikáció (ha A akkor B) logikai művelet jelölése: $A \to B$, definíciója:

A	B	$A \to B$
i	i	i
i	h	h
h	i	i
h	h	i

Példa:

Egy egész szám akkor és csak akkor osztható 3-mal, ha a számjegyei összege osztható 3-mal.

Az ekvivalencia (akkor és csak akkor A ha B) logikai művelet jelölése: $A \leftrightarrow B$, definíciója:

A	B	$A \leftrightarrow B$
i	i	i
i	h	h
h	i	h
h	h	i

Összetett ítéletek esetében a benne szereplő elemi ítéleteket ítéletváltozókkal helyettesítve és a logikai műveleteket használva formalizált ítéleteket kaphatunk.

Példa:

Akkor és csak akkor megyünk el kirándulni, ha süt a nap és nem fúj a szél.

A=Elmegyünk kirándulni.
B=Süt a nap.
C=Fúj a szél.

A fenti összetett állítás formalizált alakja: $A \leftrightarrow (B \wedge (\neg C))$

Az ítéletkalkulus formalizált ítéletekkel, azaz logikai formulákkal kapcsolatos témakörökkel foglalkozik.

Definíció:

Egy ***logikai formulán*** *az alábbi lépések véges sokszori alkalmazásával kapott kifejezéseket értjük:*

1. *Minden ítéletváltozó egyben logikai formula is.*
2. *Ha F és G logikai formula, akkor az $(\neg F)$, $(F \wedge G)$, $(F \vee G)$, $(F \to G)$, $(F \leftrightarrow G)$ kifejezések is logikai formulák.*

A fenti rekurzív definícióval kapott formulákban a legkülső zárójelezés elhagyható és el is fogjuk hagyni.

Példa:

$F(A, B, C) = (A \leftrightarrow B) \vee ((\neg B) \wedge C)$ egy logikai formula, amely három ítéletváltozót tartalmaz.

Példa:

$A \wedge ((\neg A) \to A)$ egy egyváltozós formula

Az F logikai formula rekurzív előállításában az egyes lépések eredményeként kapott formulákat az F formula részformulájának hívjuk. Az F formulában szereplő ítéletváltozókat illetve magát F-et nem tekintjük F részformulájának.

Példa:

Az $F = (A \leftrightarrow B) \vee ((\neg B) \wedge C)$ formula részformulái:

$$A \leftrightarrow B, \quad \neg B, \quad (\neg B) \wedge C$$

Nem részformula F-ben például a $B \vee (\neg B)$ formula.

Legyen $F(A_1, \ldots, A_n)$ egy logikai formula, és $G_1, \ldots, G_n$ adott logikai formulák. Ekkor $F(G_1, \ldots, G_n)$ jelöli azt a logikai formulát, ahol az $A_1, \ldots, A_n$ változók helyére behelyettesítjük a $G_1, \ldots, G_n$ logikai formulákat.

Példa:

Legyen $F(A, B, C) = (A \leftrightarrow B) \vee ((\neg B) \wedge C)$. Ekkor

$$F(D \vee E, \neg E, D \wedge E) = ((D \vee E) \leftrightarrow (\neg E)) \vee ((\neg(\neg E)) \wedge (D \wedge E))$$

Egy F logikai formula igazságtáblázatán egy olyan táblázatot értünk, ahol a formulában szereplő összes logikai változót összes lehetséges értékére kiértékeljük F logikai értékét. Ekkor célszerű a táblázat oszlopaiban felvenni az F-ben szereplő összes logikai változót, F összes részformuláját, valamint magát az F formulát.

Példa:

Tekintsük az $F(A, B, C) = (A \leftrightarrow B) \vee ((\neg B) \wedge C)$ logikai formulát. Ekkor F igazságtáblázata:

A	B	C	$A \leftrightarrow B$	$\neg B$	$(\neg B) \wedge C$	F
i	i	i	i	h	h	i
i	i	h	i	h	h	i
i	h	i	h	i	i	i
i	h	h	h	i	h	h
h	i	i	h	h	h	h
h	i	h	h	h	h	h
h	h	i	i	i	i	i
h	h	h	i	i	h	i

Definíció:

Legyen F és G két logikai formula. Azt mondjuk, hogy F és G logikailag ekvivalens, ha F és G képleteiben szereplő logikai változók tetszőleges kiértékelésére az F és G logikai értéke azonos. Ennek a jele $F \equiv G$.

Példa:

Mutassuk meg, hogy $A \to B \equiv (\neg A) \vee B$.

Ehhez elegendő $A \to B$ és $(\neg A) \vee B$ igazságtáblázatát összehasonlítani. Ezt egy kombinált táblázatban célszerű felírni:

A	B	$A \to B$	$\neg A$	$(\neg A) \vee B$
i	i	i	h	i
i	h	h	h	h
h	i	i	i	i
h	h	i	i	i

Példa:

Mutassuk meg, hogy $A \leftrightarrow B \equiv (A \to B) \wedge (B \to A)$.

A	B	$A \to B$	$B \to A$	$(A \to B) \wedge (B \to A)$	$A \leftrightarrow B$
i	i	i	i	i	i
i	h	h	i	h	h
h	i	i	h	h	h
h	h	i	i	i	i

Tétel:

Tetszőleges A, B és C logikai formulára teljesül:

1.	$A \wedge A \equiv A$	*idempotencia*
2.	$A \wedge B \equiv B \wedge A$	*kommutativitás*
3.	$(A \wedge B) \wedge C \equiv A \wedge (B \wedge C)$	*asszociativitás*
4.	$(A \vee B) \wedge A \equiv A$	*abszorptivitás*
5.	$(A \vee B) \wedge C \equiv (A \wedge C) \vee (B \wedge C)$	*disztributivitás*
6.	$A \vee A \equiv A$	*idempotencia*
7.	$A \vee B \equiv B \vee A$	*kommutativitás*
8.	$(A \vee B) \vee C \equiv A \vee (B \vee C)$	*asszociativitás*
9.	$(A \wedge B) \vee A \equiv A$	*abszorptivitás*
10.	$(A \wedge B) \vee C \equiv (A \vee C) \wedge (B \vee C)$	*disztributivitás*

Az és és vagy műveletek asszociativitása miatt használhatjuk az egyszerű $F_1 \wedge \cdots \wedge F_n$ és $F_1 \vee \cdots \vee F_n$ jelöléseket.

Tétel:

Tetszőleges A és B logikai formulára teljesül:

1. $\neg(A \wedge B) \equiv (\neg A) \vee (\neg B)$ $\quad \neg(A \vee B) \equiv (\neg A) \wedge (\neg B)$ *(de Morgan azor*
2. $\neg(\neg A) \equiv A$
3. $A \wedge (\neg A) \equiv h$ $\quad A \vee (\neg A) \equiv i$
4. $A \wedge i \equiv A$ $\quad A \vee i \equiv i$
5. $A \wedge h \equiv h$ $\quad A \vee h \equiv A$

A fenti tételben i és h azonosan igaz illetve azonosan hamis formulákat jelölnek. Megjegyezzük, hogy ez itt egy egyszerű, de "nem szabályos" jelölés, hiszen a logikai értékeket egyébként nem tekintjük logikai formulának.

Tétel:

1. *Ha két formula logikailag ekvivalens, akkor a bennük szereplő változókat tetszőleges formulákkal helyettesítve újra logikailag ekvivalens formulákat kapunk.*
2. *Ha egy logikai formula részformulája helyébe egy vele ekvivalens formulát helyettesítünk, akkor az eredeti formulával logikailag ekvivalens formulát kapunk.*

Tétel:

A logikai ekvivalencia egy ekvivalenciareláció a logikai formulák egy tetszőleges halmazán.

Példa:

Mutassuk meg, hogy $(A \to B) \wedge (A \to C) \equiv A \to (B \wedge C)$.

Legyen $F = F(A_1, \dots, A_n)$ egy olyan logikai formula, amely implikációt és ekvivalenciát nem tartalmaz. Jelölje $F^* = F^*(A_1, \dots, A_n)$ azt a logikai formulát, amit úgy kapunk, hogy

1. minden $\wedge$ jelet $\vee$-re, és minden $\vee$ jelet $\wedge$-re cserélünk,
2. minden negálatlan A_i változót $\neg A_i$-re, és minden $\neg A_i$ negált változót A_i-re cserélünk.

Példa:

Legyen $F = (A \wedge (\neg B)) \vee (B \wedge C) \vee (\neg(\neg A))$. Ekkor $F^* = ((\neg A) \vee B) \wedge ((\neg B) \vee (\neg C)) \wedge (\neg A)$.

Tétel:

Bármely olyan F logikai formulára, amely implikációt és ekvivalenciát nem tartalmaz $\neg F \equiv F^*$ teljesül.

Definíció:

Egy formulát ***diszjunktív normálformának*** *hívunk, ha* $K_1 \vee \cdots \vee K_n$ *alakú, ahol a* K_i *formulák mindegyike változók illetve változó negáljának konjunkciója.*

Példa:

Az $F = (A \wedge (\neg B) \wedge C) \vee ((\neg A) \wedge (\neg B)) \vee (B \wedge (\neg C))$ formula d.nf.

Példa:

A $G = (A \wedge (\neg B) \wedge C) \vee ((\neg A) \wedge (\neg B) \wedge C) \vee (A \wedge B \wedge (\neg C))$ formula d.nf.

Példa:

A $H = (A \wedge (\neg B) \wedge C) \vee (\neg((\neg A) \wedge (\neg B) \wedge C))$ formula nem d.nf.

Példa:

Az $I = A \wedge (\neg B)$ formula d.nf.

Definíció:

Az $A_1, \ldots, A_m$ változókból felépülő $K_1 \vee \cdots \vee K_n$ alakú formulát teljes diszjunktív normálformának hívunk, ha diszjunktív normálforma, és a K_i formulák mindegyikében az összes változó szerepel negálatlanul vagy negálva.

Példa:

Az $F = (A \wedge (\neg B) \wedge C) \vee ((\neg A) \wedge (\neg B)) \vee (B \wedge (\neg C))$ formula d.n.f, de nem t.d.nf.

Példa:

A $G = (A \wedge (\neg B) \wedge C) \vee ((\neg A) \wedge (\neg B) \wedge C) \vee (A \wedge B \wedge (\neg C))$ formula t.d.nf.

Példa:

Az $I = A \wedge (\neg B)$ formula t.d.nf.

Tétel:

Minden nem azonosan hamis logikai formula logikailag ekvivelens egy teljes diszjunktív normálformával.

Példa:

Határozzuk meg az $F = (A \leftrightarrow B) \vee ((\neg B) \wedge C)$ logikai formula t.d.nf.-ját!

A	B	C	$A \leftrightarrow B$	$\neg B$	$(\neg B) \wedge C$	F
i	i	i	i	h	h	i
i	i	h	i	h	h	i
i	h	i	h	i	i	i
i	h	h	h	i	h	h
h	i	i	h	h	h	h
h	i	h	h	h	h	h
h	h	i	i	i	i	i
h	h	h	i	i	h	i

Ekkor $F \equiv (A \wedge B \wedge C) \vee (A \wedge B \wedge (\neg C)) \vee (A \wedge (\neg B) \wedge C) \vee ((\neg A) \wedge (\neg B) \wedge C) \vee ((\neg A) \wedge (\neg B) \wedge (\neg C))$.

Ha a diszkunkció és konjunkció szerepét felcseréljük a d.nf. és a t.d.nf. definíciójában, beszélhetünk konjunktív normálformáról illetve teljes konjunktív normálformáról.

Példa:

$(A \vee (\neg B) \vee C) \wedge (A \vee C) \wedge B$ egy k.nf.

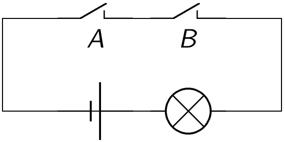
Példa:

$(A \vee (\neg B) \vee C) \wedge (A \vee B \vee C) \wedge ((\neg A) \vee B \vee C)$ egy t.k.nf.

Tétel:

Minden nem azonosan igaz logikai formula logikailag ekvivalens egy teljes konjunktív normálformával.

Tekintsünk egy áramkört, amelyben két kapcsoló sorosan van bekötve:

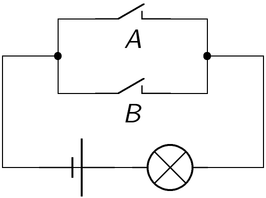


$\Longleftrightarrow$

A	B	$A \wedge B$
i	i	i
i	h	h
h	i	h
h	h	h

Az áramkörhöz az $A \wedge B$ logikai formulát rendelhetjük hozzá: Az A illetve B logikai változó értékét igaznak tekintjük, ha az A-val illetve B-vel jelölt kapcsoló be van kapcsolva az áramkörben. Az áramkörben pontosan akkor folyik áram, ha az A és B kapcsolók be vannak kapcsolva. Minden más esetben nem folyik az áram. Azaz pontosan akkor folyik áram az áramkörben, ha az $A \wedge B$ logikai formula értéke igaz.

Tekintsünk egy áramkört, amelyben két kapcsoló párhuzamosan van bekötve:



$\Longleftrightarrow$

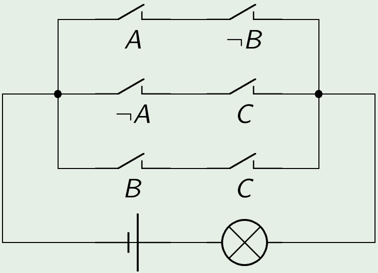
A	B	$A \vee B$
i	i	i
i	h	i
h	i	i
h	h	h

Az áramkörhöz az $A \vee B$ logikai formulát rendelhetjük hozzá: az áramkörben pontosan akkor folyik áram, ha az A és B kapcsolók közül legalább az egyik be van kapcsolva. Csak akkor nem folyik áram, ha egyik kapcsoló sincs bekapcsolva. Ugyanígy, az $A \vee B$ logikai formula akkor és csak akkor igaz, ha legalább az egyik logikai változó értéke igaz.

Egy áramkörben lehetnek szinkronizált kapcsolók, amelyek egyszerre vannak bekapcsolva vagy kikapcsolva. Ezeket azonos betűkkel jelölhetjük az áramkörben. Illetve lehetnek olyan kapcsolók, amelyek fordítva vannak szinkronizálva. Azaz ha az egyik be van kapcsolva, akkor a másik ki van kapcsolva. Ekkor a két kapcsolót A illetve $\neg A$ jelekkel feliratozhatjuk, illetve az A és $\neg A$ logikai változót illetve formulát rendelhetjük hozzá.

Példa:

Rajzoljuk fel az $(A \wedge (\neg B)) \vee ((\neg A) \wedge C) \vee (B \wedge C)$ logikai formulához tartozó áramkört:



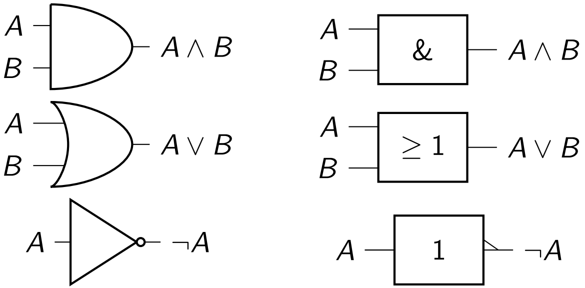
Áramkörök tervezésekor olyan áramköri elemeket használhatunk, amelyek az és, vagy valamint a negáció logikai műveletét valósítják meg. Ezeket az alábbi grafikus ábrázolással, ú.n. kapukkal jelölhetjük:

logikai művelet | amerikai szabvány | európai szabvány

és

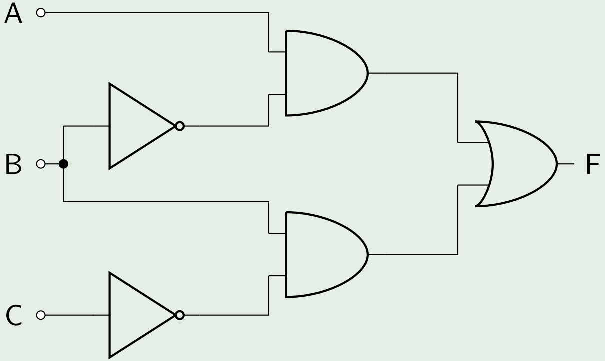
vagy

negáció



Példa:

Adjuk meg az $F = (A \wedge (\neg B)) \vee (B \wedge (\neg C))$ logikai formulát megvalósító kapuhálózatot!



Definíció:

Egy F logikai formula *tautológia**, ha azonosan igaz. Jelölése:* $\models F$.

Példa:

$\models A \vee (\neg A)$

Példa:

$\models A \to A$

Példa:

Mutassuk meg, hogy $\models A \to (B \to (A \wedge B))$

$$
\begin{aligned}
A \to (B \to (A \wedge B)) &\equiv (\neg A) \vee (B \to (A \wedge B)) \\
&\equiv (\neg A) \vee ((\neg B) \vee (A \wedge B)) \\
&\equiv ((\neg A) \vee (\neg B)) \vee (A \wedge B) \\
&\equiv (\neg (A \wedge B)) \vee (A \wedge B) \\
&\equiv i
\end{aligned}
$$

Tétel:

1. *Ha egy tautológia változóit tetszőleges logikai formulával helyettesítjük, akkor tautológiát kapunk.*
2. *Ha egy tautológia valamely részformuláját vele logikailag ekvivalens formulával helyettesítünk, akkor tautológiát kapunk.*

Definíció:

Egy olyan egy- vagy többváltozós függvényt, amelynél a változók alkalmas behelyettesítésével egy-egy ítéletet kapunk, predikátumnak hívjuk.

Példa:

$P(x) =$ "x osztható 3-mal" egy predikátum.
A változó természetes értelmezési tartománya (más szóval individuumtartománya) az egész számok halmaza. Például $P(9)$ igaz, de $P(10)$ hamis.

Példa:

$R(x, y) =$ "x osztható y-nal" egy kétváltozós predikátum.
Például $R(8, 3)$ hamis, de $R(12, 4)$ igaz.

Bevezetjük a $(\forall x)P(x)$ jelölést a "minden x-re $P(x)$" ítélet rövidítésére. A $\forall$ jelet univerzális kvantornak nevezzük.
Hasonlóan, a $(\exists x)P(x)$ jelölést a "létezik olyan x, amelyre $P(x)$" ítélet rövidítésére. A $\exists$ jelet egzisztenciális kvantornak nevezzük.
Az ítéletkalkulus eddig használt logikai formulái foglamát a predikátum, az univerzális és egzisztenciális kvantorokkal kiegészítve az ú.n. predikátumkalkulus logikai formulái fogalmát kapjuk.

Tétel:

1. $\neg((\forall x)P(x)) \equiv (\exists x)\neg P(x)$
2. $\neg((\exists x)P(x)) \equiv (\forall x)\neg P(x)$

Példa:

Egy a_n sorozat monoton növő, ha minden n-re $a_n \leq a_{n+1}$.
Ezt formalizálhatjuk a következő módon. Jelölje $P(x, y)$ azt a predikátumot, hogy $x \leq y$. Ekkor az a_n sorozat monoton növő, ha $(\forall n)P(a_n, a_{n+1})$. A fenti tétel szerint az a_n sorozat nem monoton növő, ha $(\exists n)\neg P(a_n, a_{n+1})$, azaz létezik olyan n, amelyre $a_n > a_{n+1}$.