Absztrakt vektorterek

Összeállította: dr. Leitold Adrien
egyetemi docens

Absztrakt vektortér definíciója

- Legyen V egy halmaz, Γ egy test (pl. valós vagy komplex számtest), és legyenek adottak a $+ : V \times V \to V$ és a $\cdot : \Gamma \times V \to V$ műveletek. Tegyük fel, hogy bármely $a, b, c \in V$, $\lambda, \mu \in \Gamma$ esetén

V1: $(a + b) + c = a + (b + c)$ (asszociativitás)

V2: $a + b = b + a$ (kommutativitás)

V3: Létezik olyan $o \in V$ elem, hogy bármely $a \in V$ esetén $a + o = a$. (nullelem létezése)

V4: Bármely $a \in V$ esetén létezik olyan $a' \in V$, hogy $a + a' = o$, ahol $a' = (-1) \cdot a$, az a ellentettje. (ellentett létezése)

V5: $(\lambda + \mu) \cdot a = \lambda \cdot a + \mu \cdot a$

V6: $\lambda \cdot (a + b) = \lambda \cdot a + \lambda \cdot b$

V7: $\lambda \cdot (\mu \cdot a) = (\lambda \cdot \mu) \cdot a$

V8: $1 \cdot a = a$

Absztrakt vektortér definíciója (folyt.)

Ekkor V-t a Γ test feletti vektortérnek, V elemeit vektoroknak, Γ elemeit skalároknak hívjuk.

$\Gamma = R$ esetén valós vektortérről, $\Gamma = C$ esetén komplex vektortérről beszélünk.

A V1-V8 tulajdonságokat vektortér-axiómáknak nevezzük.

Analóg módon értelmezhető lin. algebrai fogalmak absztrakt vektorterekben

- Lineáris kombináció:

  Legyen V egy Γ test feletti vektortér.

  Legyenek $a_1, a_2, \dots, a_k$ V-beli vektorok és $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k \in \Gamma$ skalárok.

  Ekkor a $\lambda_1 \cdot a_1 + \lambda_2 \cdot a_2 + \dots + \lambda_k \cdot a_k \in V$ vektort az $a_1, \dots, a_k$ vektorok $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ skalárokkal vett lineáris kombinációjának nevezzük.

- Triviális lineáris kombináció
- Lineáris függetlenség, összefüggőség véges sok vektorra

  Kiegészítés:

  Egy $H \subset V$ vektorhalmaz lineárisan független, ha minden véges részhalmaza lineárisan független. Ellenkező esetben H lineárisan összefüggő.

- Rang
- Generátorrendszer, bázis

Analóg módon értelmezhető lin. algebrai fogalmak absztrakt vektorterekben (folyt.)

- Dimenzió:
  - Ha egy vektortérnek van véges bázisa, akkor igazolható, hogy a vektortér minden bázisa ugyanannyi vektorból áll. Ezt a számot a vektortér dimenziójának nevezzük.
  - Ha egy vektortérnek nincs véges bázisa, akkor a vektorteret végtelen dimenziósnak hívjuk.
- Megjegyzés:

  Véges dimenziós vektorterekben használható a bázistranszformáció algoritmusa.

Példák absztrakt vektorterekre

1. $V = R^n$, $\Gamma = R$

   + és · művelet a tanult módon értelmezve

   valós vektortér

2. $V = C^n$ a komplex számokból képzett rendezett n-esek halmaza, $\Gamma = R$ vagy C
   - $\Gamma = R$ esetén valós vektortér
   - $\Gamma = C$ esetén komplex vektortér
   - + és · művelet a tanult módon értelmezve
   - nullelem: (0, … ,0);
   - a $(z_1, \ldots, z_n) \in C^n$ ellentettje: $(-z_1, \ldots, -z_n)$
   - $\Gamma = R$ esetén bázis: (1, … ,0), (i, … ,0), … , (0, … ,1), (0, … ,i) $\Rightarrow$ $2n$ dimenziós vektortér
   - $\Gamma = C$ esetén bázis: (1, … ,0), … , (0, … ,1) $\Rightarrow$ n dimenziós vektortér

Példák absztrakt vektorterekre (folyt.)

3. $V = R^{m \times n}$, a valós számokból képzett $m \times n$-es mátrixok halmaza, $\Gamma = R$
   - valós vektortér
   - + és · művelet a tanult módon értelmezve
   - nullelem: $m \times n$-es nullmátrix
   - az $A_{mxn} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$ ellentettje $-A_{mxn} = \begin{pmatrix} -a_{11} & -a_{12} & \dots & -a_{1n} \\ -a_{21} & -a_{22} & \dots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{m1} & -a_{m2} & \dots & -a_{mn} \end{pmatrix}$
   - bázis: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$
   - $m \cdot n$ dimenziós

Példák absztrakt vektorterekre (folyt.)

4. $V = C^{m \times n}$, a komplex számokból képzett $m \times n$-es mátrixok halmaza, $\Gamma = R$, vagy $\Gamma = C$
   - $+$ és $\cdot$ művelet a tanult módon értelmezve
   - $\Gamma = R$ esetén valós vektortér, $2m \cdot n$ dimenziós
   - $\Gamma = C$ esetén komplex vektortér, $m \cdot n$ dimenziós
5. $V = L(R^m, R^n) = \{A: R^m \to R^n \mid A \text{ lineáris}\}$, az $R^m \to R^n$ típusú lineáris leképezések halmaza, $\Gamma = R$
   - $+$ és $\cdot$ művelet a tanult módon értelmezve
   - nullelem: $O : R^m \to R^n$, $\underline{x} \to \underline{o}$
   - az A: $R^m \to R^n$ lineáris leképezés ellentettje A': $R^m \to R^n$ melyre $A'(\underline{x}) = - A(\underline{x})$, minden $\underline{x} \in R^m$ esetén
   - valós vektortér
   - igazolható, hogy $m \cdot n$ dimenziós

Példák absztrakt vektorterekre (folyt.)

6. $V = P_R$, a valós együtthatós polinomok halmaza, $\Gamma = R$
   - + és · művelet pontonként
   - nullelem: $o : R \to R$, $x \to 0$ (azonosan nulla polinom)
   - a $p(x) = a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 + \ldots + a_n \cdot x^n$ polinom ellentettje:
     $-p(x) = - a_0 - a_1 \cdot x - a_2 \cdot x^2 - \ldots - a_n \cdot x^n$
   - valós vektortér
   - bázis: $q_0 : R \to R$, $x \to 1$; $q_1 : R \to R$, $x \to x$; $q_2 : R \to R$, $x \to x^2$; …
   - végtelen dimenziós
7. $V = P_R^n$, a legfeljebb n-ed fokú valós együtthatós polinomok halmaza, $\Gamma = R$
   - műveletek, nullelem, ellentett ua., mint előbb
   - valós vektortér
   - bázis: $q_0 : R \to R$, $x \to 1$; $q_1 : R \to R$, $x \to x$; … ; $q_n : R \to R$, $x \to x^n$
   - n +1 dimenziós

Példák absztrakt vektorterekre (folyt.)

8. $V = R^N$, a valós számokból álló végtelen számsorozatok halmaza, $\Gamma = R$
   - + és · művelet a tanult módon
   - nullelem: 0, 0, 0, …(azonosan nulla sorozat)
   - az (a_n) sorozat ellentettje: $(-a_n)$
   - valós vektortér
   - bázis: a_1 : 1, 0, 0, …; a_2 : 0, 1, 0, …; a_3 : 0, 0, 1, …; …
   - végtelen dimenziós

9. $V = R^I = \{f: I \rightarrow R\}$, az $I \subseteq R$ intervallumon értelmezett valós függvények halmaza, $\Gamma = R$
   - műveletek pontonként
   - valós vektortér
   - végtelen dimenziós

Példák absztrakt vektorterekre (folyt.)

10. $C(I) = \{f\colon I \to R \mid f \text{ folytonos } \},\ \Gamma = R$

$D(I) = \{f\colon I \to R \mid f \text{ differenciálható } \},\ \Gamma = R$

$S(I) = \{f\colon I \to R \mid f \text{ integrálható}\},\ \Gamma = R$

- nyilván $D(I) \subset C(I) \subset S(I) \subset R^I$
- mindegyik végtelen dimenziós vektortér

Alterek absztrakt vektorterekben

Altér: analóg definíció: Legyen V egy a Γ test feletti vektortér. A $H \subseteq V$ vektorhalmazt altérnek hívjuk a V vektortérben, ha bármely $a, b \in H$ vektorok és bármely $\lambda \in \Gamma$ esetén $a+b \in H$ és $\lambda \cdot a \in H$ is teljesül.

H zárt a vektorműveletekre.

Megjegyzések:

- Egy altér mindig tartalmazza a vektortér nullvektorát.
- Egy vektortér altere az örökölt műveletekkel maga is vektortér, teljesülnek benne a V1-V8 vektortér-axiómák.

Példák alterekre

- P_R^n altér a P_R vektortérben.
- R^N vektortérben alteret alkotnak a korlátos sorozatok, azon belül a konvergens sorozatok, azon belül a 0-hoz konvergáló sorozatok.
- $D(I) \subset C(I) \subset S(I) \subset R^I$ egymás alterei.

Absztrakt vektorterek közti lineáris leképezések

Lineáris leképezés: Legyenek V és W azonos test (Γ) feletti vektorterek.

Az $A: V \rightarrow W$ leképezést lineárisnak nevezzük, ha bármely $x,y \in V$ és $\lambda \in \Gamma$ esetén

$A(x+y) = A(x) + A(y)$ additív

$A(\lambda \cdot x) = \lambda \cdot A(x)$ homogén

Megjegyzés: magtér, képtér fogalma analóg módon értelmezhető.

Példák lineáris leképezésekre

1. Legyen $V \subset R^N$ a konvergens sorozatok vektortere.
   $A : V \to R$, $\quad (a_n)_{n=0}^{\infty} \mapsto \lim a_n$

2. $A : P_R \to P_R$, $\quad p \mapsto p'$ (deriválás)

3. $A : S(I) \to R$, $\quad f \mapsto \int_I f$

4. $\psi : L(R^m, R^n) \to R^{n\times m}$, $\quad A \mapsto M(A)$

5. $A : R^N \to R$, $\quad (a_n)_{n=0}^{\infty} \mapsto a_k$ $(k \in N$ rögzített)

Megjegyzések

- Legyenek V és W a Γ test feletti vektorterek.

  A $V \to W$ típusú lineáris leképezésekre a korábbiakkal analóg módon értelmezhető az összeadás és a skalárral való szorzás művelete.

  Megmutatható, hogy a $L(V, W) = \{A : V \to W \mid A \text{ lineáris}\}$ leképezések halmaza ezekkel a műveletekkel vektorteret alkot.
- Speciálisan legyen V a Γ test feletti vektortér.

  A $L(V, \Gamma) = \{A : V \to \Gamma \mid A \text{ lineáris}\}$ vektorteret a V vektortér duálisának nevezzük és V^* -gal jelöljük.
- A $V \to W$ típusú lineáris leképezésekre a korábbiakkal analóg módon értelmezhető a magtér, a képtér és a rang fogalma.

Lineáris leképezés mátrixa

- Legyenek V és W azonos test feletti véges dimenziós vektorterek, legyen $\dim(V) = m$ és $\dim(W) = n$.

  B_1 legyen bázis a V vektortérben, B_2 pedig legyen bázis a W vektortérben.

  Legyen $A : V \to W$ lineáris leképezés. Az A lineáris leképezés B_1-B_2 bázisokra vonatkozó mátrixán azt az $n \times m$-es mátrixot értjük, amelynek oszlopaiban a B_1 bázis elemeihez rendelt képelemek B_2 bázisra vonatkozó koordinátái állnak.

Izomorf vektorterek

- Lineáris izomorfizmus: A bijektív lineáris leképezéseket lineáris izomorfizmusoknak nevezzük.
- Izomorf vektorterek: A V és W vektorterek izomorfak, ha létezik $A : V \to W$ lineáris izomorfizmus.
  Jel.: $V \cong W$
- Struktúra-tétel: Két azonos test feletti véges dimenziós vektortér pontosan akkor izomorf, ha dimenziójuk megegyezik.

Nullitás-rang tétel

- Nullitás: Legyen $A : V \to W$ lineáris leképezés. Az A magterének dimenzióját az A lineáris leképezés nullitásának nevezzük. Jel.: $\mathrm{n}(A)$

$$\mathrm{n}(A) = \dim(\ker(A))$$

- Nullitás-rang tétel:

  Legyen $A : V \to W$ lineáris leképezés, ahol V véges dimenziós. Ekkor:

$$\mathrm{n}(A) + \mathrm{r}(A) = \dim(V),$$

azaz A nullitásának és rangjának összege egyenlő V dimenziójával.