

1. $S: 2x-3y+4z=8$ e: $x = 1 + t$
 $y = 4$
 $z = 3 + 2t$

a) Írja fel annak az f egyenesnek a paramétermentes egyenletrendszerét, amely merőleges az S síkra és áthalad a $Q=(4, -1, 2)$ ponton!

b) Írja fel annak a síknak az egyenletét, amely tartalmazza az e egyenest és a $P=(4, 6, 4)$ pontot!

(6 pont)

2. $\underline{a}_1 := (1, 0, 3, 2); \quad \underline{a}_2 := (0, 0, 1, 0); \quad \underline{a}_3 := (1, 1, 2, 1);$
 $\underline{a}_4 := (0, 1, 3, 5); \quad \underline{a}_5 := (3, 2, 13, 10). \quad H := \{\underline{a}_1, \underline{a}_2, \underline{a}_3, \underline{a}_4, \underline{a}_5\}$

Bázistranszformációt alkalmazva válaszoljon az alábbi kérdésekre! (Indoklás!)

a) Határozza meg a H vektorhalmaz rangját!

b) Van-e olyan vektor az \mathfrak{R}^4 vektortérben, amely nem állítható elő a H vektorainak lineáris kombinációjával?

c) Legyen

$$V_1 := \{\lambda_1 \cdot \underline{a}_1 + \lambda_2 \cdot \underline{a}_2 \mid \lambda_1, \lambda_2 \in \mathfrak{R}\}, \quad V_2 := \{\lambda_1 \cdot \underline{a}_3 + \lambda_2 \cdot \underline{a}_4 \mid \lambda_1, \lambda_2 \in \mathfrak{R}\}$$

Igaz-e hogy $\mathfrak{R}^4 = V_1 \oplus V_2$? Válaszát indokolja! Ha igen, akkor bontsa fel az \underline{a}_5 vektort V_1 és V_2 -be eső összetevőkre!

(8 pont)

3. Egy bázistranszformációs eljárás során a következő táblázathoz jutottunk:

bázis	\underline{a}_1	\underline{a}_2	\underline{a}_3	\underline{a}_4	\underline{a}_5
\underline{e}_1	0		0		
\underline{a}_2	6		4		
\underline{a}_5	1		0		
\underline{a}_4	2		3		

Számolás nélkül válaszoljon az alábbi kérdésekre!(Indoklás!)

a) Töltse ki a táblázat hiányzó adatait!

b) Adja meg a $H = \{\underline{a}_1, \underline{a}_2, \underline{a}_3, \underline{a}_4, \underline{a}_5\}$ vektorhalmaz egy maximális lineárisan független részhalmazát!

c) Van-e a H vektorhalmaznak 3 vektorból álló lineárisan független, illetve 3 vektorból álló lineárisan összefüggő részhalmaza?

d) Előállítható-e az \underline{a}_5 vektor az \underline{a}_2 és \underline{a}_4 vektorok lineáris kombinációjaként?

(5 pont)

4. $A := \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}; \quad B := [2 \quad -1 \quad 3]; \quad C := \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}; \quad D := \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

a) Melyik létezik az alábbi mátrixok közül? Amelyik létezik, azt számítsa ki!

$$A^T \cdot C \cdot B, \quad A \cdot C^T \cdot B^T, \quad B \cdot (B^T \cdot B + 2D)$$

b) Határozza meg a D mátrix rangját!

(6 pont)