

Primitív függvény, határozatlan integrál

Elmélet

Definition 1 (Definíció) Legyen $I \subset \mathbb{R}$ intervallum és $f : I \rightarrow \mathbb{R}$. Az $F : I \rightarrow \mathbb{R}$ függvényt f **primitív függvényének** nevezzük az I intervallumon, ha F differenciálható I -n és itt $F'_I = f$.

Theorem 2 (Tétel) Ha az F az f függvény primitív függvénye az I intervallumon, akkor minden $c \in \mathbb{R}$ esetén $F + c$ is primitív függvénye f -nek az I intervallumon, és f -nek bármely primitív függvény I -n $F + c$ alakú, ahol $c \in \mathbb{R}$.

Definition 3 (Definíció) Egy f valós függvény **határozatlan integrálján** az $I \subset \mathbb{R}$ intervallumon f I -n vett primitív függvényeinek a halmazát értjük (ha nem üres). Jelölés: $\int f$ vagy $\int f(x) dx$. Az f függvényt integrandusznak nevezzük.

Alapintegrálok

$\int f(x) dx$	$F(x) + C$	$\int f(x) dx$	$F(x) + C$
$\int x^a dx$	$\frac{x^{a+1}}{a+1} + C$	$\int \cos(x) dx$	$\sin(x) + C$
$\int \frac{1}{x} dx$	$\ln x + C$	$\int \frac{1}{\cos^2(x)} dx$	$\operatorname{tg}(x) + C$
$\int e^x dx$	$e^x + C$	$\int \frac{1}{\sin^2(x)} dx$	$-\operatorname{ctg}(x) + C$
$\int a^x dx$	$\frac{a^x}{\ln(a)} + C$	$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$	$\arcsin(x) + C$
$\int \sin(x) dx$	$-\cos(x) + c$	$\int \frac{1}{1+x^2} dx$	$\operatorname{arctg}(x) + C$

$$c, \alpha \in \mathbb{R}, \quad a \in (0, \infty) \setminus \{1\}$$

Tulajdonságok

Theorem 4 (Linearitás) Legyen $(a, b) \subset \mathbb{R}$. Ha f -nek és g -nek primitív függvénye az (a, b) -n F illetve G , továbbá $k \in \mathbb{R}$, akkor (kf) -nek primitív függvénye az (a, b) -n kF , $(f+g)$ -nek pedig $F+G$. Eszerint

$$\begin{aligned}\int (kf) &= k \int f, \\ \int (f+g) &= \int f + \int g.\end{aligned}$$

Theorem 5 (Lineáris helyettesítés) Legyen f -nek primitív függvénye az (α, β) -n F , továbbá $g(x) = ax + b$ lineáris függvény, $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ és (γ, δ) olyan intervallum, hogy $g((\gamma, \delta)) \subset (\alpha, \beta)$. Ekkor az $f \circ g$ függvénynek a (γ, δ) -n primitív függvénye $\frac{1}{a}(F \circ g)$, azaz

$$\int f(ax + b) dx = \frac{1}{a} F(ax + b) + c, \quad x \in (\gamma, \delta).$$

Parciális integrálás

Theorem 6 (Parciális integrálás) Legyen $(a, b) \subset \mathbb{R}$. Ha f és g differenciálhatók (a, b) -n és az $f g'$ függvénynek van primitív függvénye (a, b) -n, akkor az $f' g$ függvénynek is van primitív függvénye (a, b) -n, és

$$\int f'(x) g(x) dx = f(x) g(x) - \int f(x) g'(x) dx, \quad x \in (a, b).$$

Helyettesítéses integrálás

Theorem 7 (1. típusú helyettesítés) Legyen g differenciálható és nem állandó $(a, b) \subset \mathbb{R}$ intervallumon. Ha F primitív függvénye f -nek a $g((a, b))$ intervallumon, akkor $F \circ g$ primitív függvénye f -nek az (a, b) -n, azaz

$$\int f(g(x)) g'(x) dx = \left[\int f(u) du \right]_{u=g(x)} = F(g(x)) + c, \quad x \in (a, b).$$

Theorem 8 (2. típusú helyettesítés) Legyen g differenciálható $(\alpha, \beta) \subset \mathbb{R}$ intervallumon és g' sehol sem tűnik el (α, β) -n. Ha F primitív függvénye $(f \circ g) g'$ -nek az (α, β) -n, akkor $F \circ g^{-1}$ primitív függvénye f -nek a $g((\alpha, \beta))$ intervallumon, azaz

$$\begin{aligned} \int f(x) dx &= \left[\int f(g(u)) g'(u) du \right]_{u=g^{-1}(x)} = \\ &= F(g^{-1}(x)) + c, \quad x \in g((\alpha, \beta)). \end{aligned}$$

Feladatok

1. Számolja ki az alábbi határozatlan integrált!

(a)

$$\int x^5 \ln(x) dx,$$

(b)

$$\int x \ln(x+1) dx,$$

(c)

$$\int x \sin(x) dx,$$

(d)

$$\int \sqrt{x} \ln(x) dx,$$

(e)

$$\int (5x+1) e^x dx,$$

(f)

$$\int x e^x dx,$$

(g)

$$\int x^4 \ln(x) dx,$$

(h)
$$\int \ln(x+1) dx,$$

(i)
$$\int 2x \sin(x-5) dx,$$

(j)
$$\int \frac{1}{x^3} \ln(x) dx,$$

(k)
$$\int x e^{5x} dx,$$

(l)
$$\int x \cos(3x) dx,$$

(m)
$$\int \sqrt[5]{x} \ln(x) dx,$$

(n)
$$\int (2x+7) e^x dx,$$

(o)
$$\int x \operatorname{arctg}(x) dx.$$

2. Számolja ki az alábbi határozatlan integrált!

(a)
$$\int \frac{\sqrt{\arccos(x)}}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

(b)
$$\int (1+x^2)^{10} x dx,$$

(c)
$$\int \frac{\cos(x)}{\sqrt[3]{\sin(x)}} dx,$$

(d)
$$\int \frac{\operatorname{arctg}(x)}{1+x^2} dx,$$

(e)
$$\int \frac{\cos(x)}{\sqrt[3]{\sin(x)}} dx,$$

(f)
$$\int x \sin(x^2+1) dx,$$

(g)
$$\int \frac{\ln(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} dx,$$

(h)

$$\int \frac{\ln^2(x)}{x} dx$$

(i)

$$\int (1+x^2)^{10} x dx,$$

(j)

$$\int \cos\left(\frac{1}{2}x\right) dx,$$

(k)

$$\int \frac{\operatorname{ctg}^6(x)}{-\sin^2(x)} dx,$$

(l)

$$\int \frac{e^{2x}}{e^{2x}+5} dx,$$

(m)

$$\int \frac{x^4}{3+x^5} dx,$$

(n)

$$\int \frac{x^2+1}{x^3+3x} dx,$$

(o)

$$\int x \sin(x^2+1) dx,$$

(p)

$$\int \frac{1}{x \ln(x)} dx,$$

(q)

$$\int \sqrt{3x-2} dx,$$

(r)

$$\int \frac{-1}{\sin^2(x) \operatorname{ctg}(x)} dx,$$

(s)

$$\int \frac{1}{\sqrt[3]{3-5x}} dx,$$

(t)

$$\int \frac{3x-4}{6x^2-16x} dx,$$

(u)

$$\int \sin^2(x) \cos(x) dx,$$

(v)

$$\int \frac{\sqrt{\ln(x)}}{x} dx,$$

(w)

$$\int \operatorname{tg}(x) dx,$$

(x)

$$\int 14x\sqrt[5]{7x^2 - 2} dx.$$

(y)

$$\int \frac{4x}{x^2 + 2x + 5} dx,$$

(z)

$$\int \frac{x}{x^2 + 2x + 10} dx.$$

3. Számolja ki az alábbi határozatlan integrált!

(a)

$$\int \frac{x + 1}{(x - 2)(x + 5)} dx,$$

(b)

$$\int \frac{x + 1}{(x - 2)(x + 5)} dx,$$

(c)

$$\int \frac{2x + 1}{(x + 1)(x - 3)} dx,$$

(d)

$$\int \frac{x + 1}{(x - 2)(x + 3)} dx,$$

(e)

$$\int \frac{2x + 1}{(x - 3)(x + 2)} dx.$$