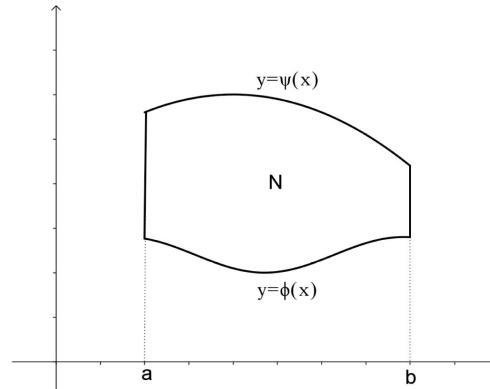


## Kettősintegrálás normáltartományon

### Elmélet

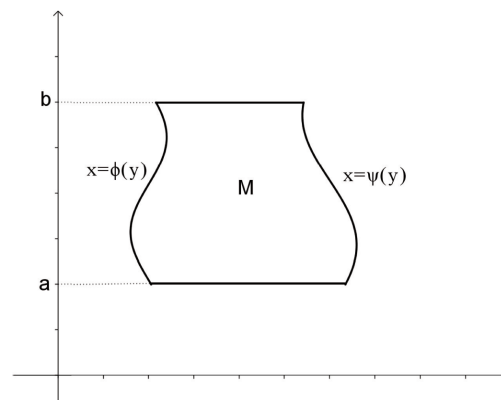
**Definition 1 (Definíció)** Egy  $N$  halmazt  $x$ -re nézve normáltartománynak nevezzük, ha

$$N = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b \text{ és } \Phi(x) \leq y \leq \Psi(x), \text{ ahol } \Phi, \Psi \text{ folytonos függvények}\}.$$



Egy  $M$  halmazt  $y$ -ra nézve normáltartománynak nevezzük, ha

$$M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \Phi(y) \leq x \leq \Psi(y) \text{ és } a \leq y \leq b, \text{ ahol } \varphi, \Phi \text{ folytonos függvények}\}.$$



**Theorem 2 (Szukcesszív (ismételt) integrálás normáltartományon)** Bármely normáltartomány korlátos, zárt és mérhető, továbbá ha  $f$  integrálható az előző definícióban szereplő  $N$  normáltartományon, akkor

$$\iint_N f(x, y) dx dy = \int_a^b \left( \int_{\Phi(x)}^{\Psi(x)} f(x, y) dy \right) dx$$

feltéve, hogy a jobb oldali belső integrál minden  $x \in [a, b]$ -re létezik. Hasonlóképpen, ha  $f$  integrálható az  $M$  normáltartományon, akkor

$$\iint_M f(x, y) dx dy = \int_a^b \left( \int_{\Phi(y)}^{\Psi(y)} f(x, y) dx \right) dy$$

feltéve, hogy a jobb oldali belső integrál minden  $x \in [a, b]$ -re létezik.

## Polártranszformáció

Kör alakú  $H$  tartományok esetén  $((u_0, v_0)$  a kör középpontja) használjuk az

$$\begin{aligned}x &= r \cos(\varphi), \\y &= r \sin(\varphi)\end{aligned}$$

ún. polártranszformációt, ahol a Jacobi-determináns

$$J(r, \varphi) = r.$$

Ekkor

$$\iint_N f(x, y) dx dy = \iint_{N^*} f(r \cos(\varphi), r \sin(\varphi)) \cdot r dr d\varphi,$$

ahol  $N$  az  $N^*$  halmaz

$$(r, \varphi) \rightarrow (r \cos(\varphi), r \sin(\varphi))$$

definícióval értelmezett leképezés melletti képe.

### Feladatok

1. Legyen

$$H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1, \quad 1 - x^2 \leq y \leq e^x\}.$$

Bontsa fel kettő egyszeres integrálra mindkét sorrendben az

$$\iint_H 4xy^3 dx dy$$

integrált, és az egyik esetben számítsa ki!

2. Legyen

$$H = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y^2 \leq x \leq y, \quad 0 \leq y \leq \frac{1}{2} \right\}.$$

Bontsa fel kettő egyszeres integrálra mindkét sorrendben az

$$\iint_H 2y \cos(2x) dx dy$$

integrált, és az egyik esetben számítsa ki!

3. Legyen  $H \subset \mathbb{R}^2$  az  $x = 0$ ,  $x = 1$ , az  $y = \sqrt{x}$  és az  $y = e^x$  egyenletű görbék által határolt korlátos halmaz. Bontsa fel kettő egyszeres integrálra mindkét sorrendben az

$$\iint_H 2xy dx dy$$

integrált, és az egyik esetben számítsa ki!

4. Legyen  $H \subset \mathbb{R}^2$  az  $y = 0$ ,  $y = x + \frac{\pi}{2}$  és az  $y = \arccos(x)$  egyenletű görbék által határolt korlátos halmaz. Bontsa fel kettő egyszeres integrálra mindkét sorrendben az

$$\iint_H y dx dy$$

integrált, és az egyik esetben számítsa ki!

5. Legyen

$$H = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{-\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}, \quad \sin(x) \leq y \leq -2 \left( x - \frac{\pi}{2} \right) + 1 \right\}.$$

Bontsa fel kettő egyszeres integrálra mindkét sorrendben az

$$\iint_H x dx dy$$

integrált, és az egyik esetben számítsa ki!

6. Legyen

$$H = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}, \quad -x^2 \leq y \leq \sin(x) \right\}.$$

Bontsa fel kettő egyszeres integrálra mindkét sorrendben az

$$\iint_H \cos(x) dx dy$$

integrált, és az egyik esetben számítsa ki!

7. Legyen

$$H = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1, \quad -\sqrt{x} \leq y \leq \arctg(x) \right\}.$$

Bontsa fel kettő egyszeres integrálra mindkét sorrendben az

$$\iint_H 2x dx dy$$

integrált, és az egyik esetben számítsa ki!

8. Legyen

$$H = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{1}{3}(y - \pi) - 1 \leq x \leq \cos(y), \quad 0 \leq y \leq \pi \right\}.$$

Bontsa fel kettő egyszeres integrálra mindkét sorrendben az

$$\iint_H y dx dy$$

integrált, és az egyik esetben számítsa ki!

9. Számítsa ki az

$$\iint_H 2xy dx dy$$

integrált, ahol a  $H \subset \mathbb{R}^2$  az  $y = 0$ ,  $y = 1$ , az  $y = x^2$  és az  $y = \ln(x)$  egyenletű görbék által határolt korlátos halmaz!

10. Legyen  $H \subset \mathbb{R}^2$  az  $y = 1 + \ln(x)$ ,  $y = \frac{1}{x^2}$  és az  $x = e$  egyenletű görbék által határolt korlátos halmaz. Bontsa fel kettő egyszeres integrálra mindkét sorrendben az

$$\iint_H \frac{2y}{x} dx dy$$

integrált, és az egyik esetben számítsa ki!

11. Cserélje fel az integrálások sorrendjét!

$$\int_{-1}^1 \left( \int_{|y|-1}^{1-y^2} f(x, y) dx \right) dy$$

12. Cserélje fel az integrálások sorrendjét!

$$\int_{-2}^2 \left( \int_{x^2-4}^{2-|x|} f(x, y) dy \right) dx$$

13. Cserélje fel az integrálások sorrendjét!

$$\int_0^1 \left( \int_{-e^y}^{\operatorname{tg}(y)} f(x, y) dx \right) dy$$

14. Cserélje fel az integrálások sorrendjét!

$$\int_0^1 \left( \int_{-\frac{y}{2}}^{e^y} f(x, y) dx \right) dy$$

15. Cserélje fel az integrálások sorrendjét!

$$\int_0^1 \left( \int_{\sqrt{y}}^{e^y} f(x, y) dx \right) dy$$

16. Legyen

$$H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, \quad 0 \leq y \leq x\}.$$

Számítsa ki

$$\iint_H \frac{1}{x^2} dx dy$$

integrált!

17. Legyen

$$H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 4\}.$$

Számítsa ki az

$$\iint_H xy dx dy$$

integrált!

18. Legyen

$$H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0\}.$$

Számítsa ki az

$$\iint_H \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1}} dx dy$$

integrált!

19. Legyen

$$H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, \quad x \geq 0, \quad y \geq x\}.$$

Számítsa ki az

$$\iint_H \frac{x}{y^3} dx dy$$

integrált!

20. Legyen

$$H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0\}.$$

Számítsa ki az

$$\iint_H \sin(x^2 + y^2) dx dy$$

integrált!

21. Legyen

$$H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}.$$

Számítsa ki az

$$\iint_H xy^2 dx dy$$

integrált!

22. Legyen

$$H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 4, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0\}.$$

Számítsa ki az

$$\iint_H \frac{2x}{y+1} dx dy$$

integrált!

23. Legyen

$$H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, \quad x \leq 0, \quad y \geq -x\}.$$

Számítsa ki az

$$\iint_H \sin(x^2 + y^2) dx dy$$

integrált!

24. Legyen

$$H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 4, \quad y \geq |x|\}.$$

Számítsa ki az

$$\iint_H x^2 e^{(x^2+y^2)^2} dx dy$$

integrált!