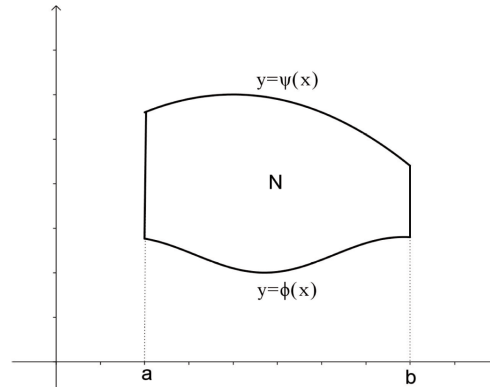


## Kettősintegrálás normáltartományon

### Elmélet

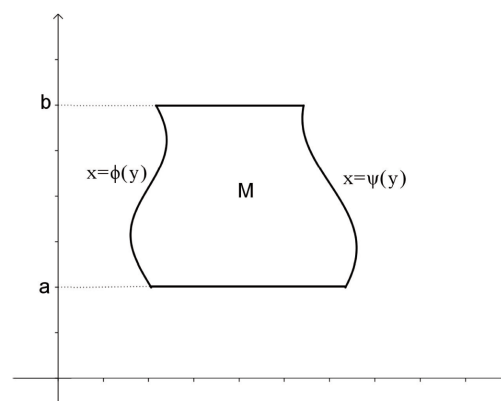
**Definition 1 (Definíció)** Egy  $N$  halmazt  $x$ -re nézve normáltartománynak nevezzük, ha

$$N = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b \text{ és } \Phi(x) \leq y \leq \Psi(x), \text{ ahol } \Phi, \Psi \text{ folytonos függvények}\}.$$



Egy  $M$  halmazt  $y$ -ra nézve normáltartománynak nevezzük, ha

$$M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \Phi(y) \leq x \leq \Psi(y) \text{ és } a \leq y \leq b, \text{ ahol } \varphi, \Phi \text{ folytonos függvények}\}.$$



**Theorem 2 (Szukcesszív (ismételt) integrálás normáltartományon)** Bármely normáltartomány korlátos, zárt és mérhető, továbbá ha  $f$  integrálható az előző definícióban szereplő  $N$  normáltartományon, akkor

$$\iint_N f(x, y) dx dy = \int_a^b \left( \int_{\Phi(x)}^{\Psi(x)} f(x, y) dy \right) dx$$

feltéve, hogy a jobb oldali belső integrál minden  $x \in [a, b]$ -re létezik. Hasonlóképpen, ha  $f$  integrálható az  $M$  normáltartományon, akkor

$$\iint_M f(x, y) dx dy = \int_a^b \left( \int_{\Phi(y)}^{\Psi(y)} f(x, y) dx \right) dy$$

feltéve, hogy a jobb oldali belső integrál minden  $x \in [a, b]$ -re létezik.

## Feladatok

1. Számítsa ki az

$$\iint_H y dx dy$$

kettős integrált, ahol  $H$  az  $y = x^2$  és az  $y = x + 2$  görbék által határolt korlátos halmaz!

2. Számítsa ki az

$$\iint_H (x + y) dx dy$$

kettős integrált, ahol  $H$  az  $y = x^2 + 2x$  és az  $y = 4 - x^2$  görbék által határolt korlátos halmaz!

3. Számítsa ki az

$$\iint_H (x + y) dx dy$$

kettős integrált, ahol  $H$  az  $y = x$  és az  $y = \sqrt{x}$  görbék által határolt korlátos halmaz!

4. Számítsa ki az

$$\iint_H (x + 2y) dx dy$$

kettős integrált, ahol  $H$  az  $y = x$  és az  $y = \sqrt{x}$  görbék által határolt korlátos halmaz!

5. Számítsa ki az

$$\iint_H xy dx dy$$

kettős integrált, ahol  $H$  az  $y = x^2$  és az  $y = x + 2$  görbék által határolt korlátos halmaz!

6. Számítsa ki az

$$\iint_H xy dx dy$$

kettős integrált, ahol  $H$  az  $y = x^2$  és az  $y = 3x - 2$  görbék által határolt korlátos halmaz!

7. Számítsa ki az

$$\iint_H (x + y) dx dy$$

kettős integrált, ahol  $H$  az  $y = x^2$  és az  $y = 5x - 6$  görbék által határolt korlátos halmaz!

8. Számítsa ki az

$$\iint_H (x - y) dx dy$$

kettős integrált, ahol  $H$  az  $y = x^2$  és az  $y = x$  görbék által határolt korlátos halmaz!

9. Számítsa ki az

$$\iint_H x dx dy$$

kettős integrált, ahol  $H$  az  $y = x^2 + 1$  és az  $y = 9 - x^2$  görbék által határolt korlátos halmaz!

10. Számítsa ki az

$$\iint_H (x - 4y) \, dx \, dy$$

kettős integrált, ahol  $H$  az  $y = x^2 + x$  és az  $y = 0$  görbék által határolt korlátos halmaz!

11. Legyen  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  folytonos függvény. Cserélje fel az integrálások sorrendjét!

(a)

$$\int_0^1 \left( \int_0^x f(x, y) \, dy \right) dx$$

(b)

$$\int_0^1 \left( \int_{x^2}^{\sqrt{x}} f(x, y) \, dy \right) dx$$

(c)

$$\int_0^1 \left( \int_x^{\sqrt{x}} f(x, y) \, dy \right) dx$$

(d)

$$\int_0^1 \left( \int_0^{x^2} f(x, y) \, dy \right) dx$$

(e)

$$\int_0^1 \left( \int_{x^2}^x f(x, y) \, dy \right) dx$$

(f)

$$\int_1^2 \left( \int_x^{2x} f(x, y) \, dy \right) dx$$

(g)

$$\int_1^2 \left( \int_0^{\ln(y)} e^x \, dx \right) dy$$