Függvények határértéke

Elmélet

Definition 1 (Definíció) *Egy $a \in \mathbb{R}$ pont $\varepsilon-$**sugarú pontozott környezet**én*

$$P_\varepsilon(a) = K_\varepsilon(a) \setminus \{a\} = (a-\varepsilon, a) \cup (a, a+\varepsilon)$$

alakú halmazt értjük, ahol $\varepsilon \in (0, \infty)$.

Definition 2 (Definíció) *A $b \in \bar{\mathbb{R}}$ számot az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ **függvény határértéké**nek nevezzük az $a \in \bar{\mathbb{R}}$ pontban, ha az f függvény értelmezve van az a pont valamely pontozott környezetében és bármely olyan $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ sorozatra, amelyre $x_n \in dom f$, $x_n \neq a$ minden $n \in \mathbb{N}$ esetén, és $x_n \to a$, a függvényértékek $\{f(x_n)\}_{n=0}^{\infty}$ sorozata $b-$hez tart.*

Jelölés:

$$\lim_{x\to a} f(x) = b.$$

Definition 3 (Definíció) *A $b \in \bar{\mathbb{R}}$ számot az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ **függvény jobb oldali határértéké**nek nevezzük az $a \in [-\infty, \infty)$ pontban, ha az f függvény értelmezve van az a pont valamely jobb oldali pontozott környezetében és bármely olyan $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ sorozatra, amelyre $x_n \in dom f$, $x_n > a$ minden $n \in \mathbb{N}$ esetén, és $x_n \to a$, a függvényértékek $\{f(x_n)\}_{n=0}^{\infty}$ sorozata $b-$hez tart.*

Jelölés:

$$\lim_{x\to a+} f(x) = b.$$

Definition 4 (Definíció) *A $b \in \bar{\mathbb{R}}$ számot az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ **függvény bal oldali határértéké**nek nevezzük az $a \in (-\infty, \infty]$ pontban, ha az f függvény értelmezve van az a pont valamely bal oldali pontozott környezetében és bármely olyan $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ sorozatra, amelyre $x_n \in dom f$, $x_n < a$ minden $n \in \mathbb{N}$ esetén, és $x_n \to a$, a függvényértékek $\{f(x_n)\}_{n=0}^{\infty}$ sorozata $b-$hez tart.*

Jelölés:

$$\lim_{x\to a-} f(x) = b.$$

Theorem 5 (Tétel) ***A határértékszámítás szabályai***

Legyen $a \in \bar{\mathbb{R}}$. Ekkor

$$\lim_{x\to a}(f(x) \pm g(x)) = \lim_{x\to a} f(x) \pm \lim_{x\to a} g(x),$$

$$\lim_{x\to a}(f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x\to a} f(x) \cdot \lim_{x\to a} g(x),$$

$$\lim_{x\to a}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)},$$

feltéve, hogy $\lim_{x\to a} f(x)$ és $\lim_{x\to a} g(x)$ létezik, illetve a jobb oldalon szereplő művelet értelmezve van $\bar{\mathbb{R}}-ban$.

Nevezetes függvényhatárértékek

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1 \qquad \lim_{x\to 0}\frac{e^x - 1}{x} = 1 \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\ln(x+1)}{x} = 1$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x} = \infty \qquad \lim_{x\to 0^-}\frac{1}{x} = -\infty \qquad \lim_{x\to 0}\frac{1}{x} \quad \text{nem létezik}$$

Racionális törtfüggvény határértéke a végtelenben

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_kx^k+a_{k-1}x^{k-1}+...+a_1x+a_0}{b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+...+b_1x+b_0}=A,$$

ahol $a_k \neq 0 \neq b_m$. Ekkor

$A=0,$	$A=\dfrac{a_k}{b_m},$	$A=\infty,$	$A=-\infty,$
ha	ha	ha	ha
$m>k$	$k=m$	$k>m \quad és$	$k>m \quad és$
		$a_kb_m>0$	$a_kb_m<0$

Feladatok

1. Számítsa ki az alábbi határértékeket!

$(a)\quad \lim_{x\to\infty}\frac{x^3+x^2-6x}{x^2-x-2}$ $\qquad (b)\quad \lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}{2\sqrt{x}+1}$

$(c)\quad \lim_{x\to 2}\frac{x^3+x^2-6x}{x^2-x-2}$ $\qquad (d)\quad \lim_{x\to 1}\frac{x-\sqrt{2-x}}{x-1}$

$(e)\quad \lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x^2+4x}-\sqrt{x+10}}{x-2}$ $\qquad (f)\quad \lim_{x\to\infty} x\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$

$(g)\quad \lim_{x\to 4}\frac{x^2-4x}{\sqrt{x}-2}$ $\qquad (h)\quad \lim_{x\to 3}\left(\frac{1}{x-3}-\frac{6}{x^2-9}\right)$

$(i)\quad \lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2+x+1}-1}{x}$ $\qquad (j)\quad \lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x^2-3}-\sqrt{x+3}}{x-3}$

$(k)\quad \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+4}-2}{7x}$ $\qquad (l)\quad \lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{x+5}-\sqrt{x+2}}$

$(j)\quad \lim_{x\to 0} arctg\left(\frac{1}{x}\right)$ $\qquad (m)\quad \lim_{x\to 0}\arccos\left(\frac{x}{x^2+1}\right)$

2. Számítsa ki az alábbi határértékeket!

$(a)\quad \lim_{x\to 1}\frac{\sin(2x-2)}{x^2-1}$ $\qquad (b)\quad \lim_{x\to -\infty}\frac{\sin(e^{2x})}{e^x}$

$(c)\quad \lim_{x\to 1}\frac{\sin\left(\ln^2(x)\right)}{\ln(x)}$ $\qquad (d)\quad \lim_{x\to -1}\frac{\sin(x^2+x)}{x+1}$

$(e)\quad \lim_{x\to 1}\frac{\sin(x^2-1)}{x-1}$ $\qquad (f)\quad \lim_{x\to 0}\frac{tg(2x)}{2x}$