

Függvények határértéke

Elmélet

Definition 1 (Definíció) Egy $a \in \mathbb{R}$ pont ε -sugarú pontozott környezetén

$$P_\varepsilon(a) = K_\varepsilon(a) \setminus \{a\} = (a - \varepsilon, a) \cup (a, a + \varepsilon)$$

alakú halmazt értjük, ahol $\varepsilon \in (0, \infty)$.

Definition 2 (Definíció) A $b \in \bar{\mathbb{R}}$ számot az $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvény határértékének nevezzük az $a \in \bar{\mathbb{R}}$ pontban, ha az f függvény értelmezve van az a pont valamely pontozott környezetében és bármely olyan $\{x_n\}_{n=0}^\infty$ sorozatra, amelyre $x_n \in \text{dom} f$, $x_n \neq a$ minden $n \in \mathbb{N}$ esetén, és $x_n \rightarrow a$, a függvényértékek $\{f(x_n)\}_{n=0}^\infty$ sorozata b -hez tart.

Jelölés:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b.$$

Definition 3 (Definíció) A $b \in \bar{\mathbb{R}}$ számot az $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvény jobb oldali határértékének nevezzük az $a \in [-\infty, \infty)$ pontban, ha az f függvény értelmezve van az a pont valamely jobb oldali pontozott környezetében és bármely olyan $\{x_n\}_{n=0}^\infty$ sorozatra, amelyre $x_n \in \text{dom} f$, $x_n > a$ minden $n \in \mathbb{N}$ esetén, és $x_n \rightarrow a$, a függvényértékek $\{f(x_n)\}_{n=0}^\infty$ sorozata b -hez tart.

Jelölés:

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = b.$$

Definition 4 (Definíció) A $b \in \bar{\mathbb{R}}$ számot az $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvény bal oldali határértékének nevezzük az $a \in (-\infty, \infty]$ pontban, ha az f függvény értelmezve van az a pont valamely bal oldali pontozott környezetében és bármely olyan $\{x_n\}_{n=0}^\infty$ sorozatra, amelyre $x_n \in \text{dom} f$, $x_n < a$ minden $n \in \mathbb{N}$ esetén, és $x_n \rightarrow a$, a függvényértékek $\{f(x_n)\}_{n=0}^\infty$ sorozata b -hez tart.

Jelölés:

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = b.$$

Theorem 5 (Tétel) A határértékszámítás szabályai

Legyen $a \in \bar{\mathbb{R}}$. Ekkor

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \pm g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow a} g(x),$$

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x),$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right) = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)},$$

feltéve, hogy $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ és $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$ létezik, illetve a jobb oldalon szereplő művelet értelmezve van $\bar{\mathbb{R}}$ -ban.

Nevezetes függvényhatárértékek

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = \infty \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \text{ nem létezik}$$

Racionális törtfüggvény határértéke a végtelenben

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a_k x^k + a_{k-1} x^{k-1} + \dots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_1 x + b_0} = A,$$

ahol $a_k \neq 0 \neq b_m$. Ekkor

$A = 0,$	$A = \frac{a_k}{b_m},$	$A = \infty,$	$A = -\infty,$
<i>ha</i>	<i>ha</i>	<i>ha</i>	<i>ha</i>
$m > k$	$k = m$	$k > m$ és $a_k b_m > 0$	$k > m$ és $a_k b_m < 0$

Feladatok

1. Számítsa ki az alábbi határértékeket!

(a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + x^2 - 6x}{x^2 - x - 2}$	(b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 + x^2 - 6x}{x^2 - x - 2}$
(c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 + x^2 - 6x}{x^2 - x - 2}$	(d) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 + x^2 - 6x}{x^2 - x - 2}$
(e) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{2}}{x - 2}$	(f) $\lim_{x \rightarrow \infty} x (\sqrt{x^2 + 1} - x)$
(g) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x - 1}$	(h) $\lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{1}{x - 3} - \frac{6}{x^2 - 9} \right)$
(i) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2 + x + 1} - 1}{x}$	(j) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + x + 1} - 1}{x}$
(k) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x + 4} - 2}{7x}$	(l) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{x + 5} - \sqrt{x + 2}}$

2. Számítsa ki az alábbi határértékeket!

(a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x)}{2x}$	(b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x^2)}{x^2}$
(c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(5x)}{x}$	(d) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sin(x - 2)}{x - 2}$
(e) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(4x)}{\sin(2x)}$	(f) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}(2x)}{2x}$